C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 309-312, 1991

Probabilités/*Probability Theory*

Une caractérisation des diffusions par le calcul des variations stochastiques

Sylvie ROELLY et Hans ZESSIN

Résumé – La mesure de Wiener est caractérisée comme *l'unique* diffusion « d'équilibre », au sens où elle est l'unique loi sous laquelle l'opérateur de dérivation sur l'espace canonique et l'intégrale de Skorohod sont en dualité. Ce résultat est généralisé aux processus de Wiener avec dérive.

A characterization of diffusions by the stochastic calculus of variations

Abstract – *The Wiener measure is characterized as the* unique *diffusion law solution of the "equilibrium condition" which expresses that the Skorohod integral is equivalent to the dual of the derivative operator on Wiener space. This result is extended to the characterization of a large class of Wiener measures with drift.*

0. INTRODUCTION. – Nous considérons des diffusions sur l'espace $\Omega=\mathscr{C}([0,+\infty[)$, c'est-à-dire les lois de probabilités Q qui sont localement dominées par la mesure de Wiener P et de densité de carré intégrable, et nous montrons d'abord que dans cette classe de probabilités sur Ω la mesure de Wiener est *caractérisée* par la condition « d'équilibre » suivante :

$$E_P(F\zeta_g)=E_P(D_g F) \tag{1.1}$$

pour une large classe de fonctionnelles F sur Ω et de fonctions g locales sur $\mathbb{R}_+$. Nous notons ζ_g l'intégrale d'Ito de g sur $\mathbb{R}_+$ et $D_g F$ le gradient de F dans la direction $\int_0^{\cdot} g(s)\,ds$ (D est l'opérateur d'annihilation dans l'espace de Wiener).

Dans une deuxième étape, nous montrons que Q, la loi du processus de Wiener avec dérive β, est *caractérisée* par la condition d'équilibre généralisée suivante :

$$E_Q(F\zeta_g)=E_Q(D_g F)+E_Q\left(FD_g\left(\zeta_\beta-\frac{1}{2}\int\beta_s^2\,ds\right)\right) \tag{1.2}$$

pour une assez grande classe de fonctionnelles F et de fonctions g. Les conditions (1.1) et (1.2) sont qualifiées de conditions d'équilibre, car les diffusions considérées sont des états d'équilibre au sens de la mécanique statistique, *i.e.* maximisent l'énergie libre liée à un certain potentiel (*cf.* [9]). D'autre part, il existe une analogie directe entre l'équation (1.2) et l'équation d'équilibre (3.3) de [8] qui caractérise les mesures de Gibbs de systèmes à une infinité de particules.

NOTATIONS ET CADRE DU PROBLÈME. – Sur Ω muni de sa tribu canonique $(\mathscr{F}_t)_{t>0}$ et de la mesure de référence P, la mesure de Wiener, on s'intéressera aux probabilités de l'ensemble suivant :

$$\mathscr{P}=\left\{Q,\ \forall t>0,\ Q|_{\mathscr{F}_t}\ll P|_{\mathscr{F}_t} \text{ et } M_t=\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t}\in L^2(\Omega)\right\}.$$

Note présentée par Paul-André MEYER.

0764-4442/91/03130309 $ 2.00 © Académie des Sciences

Un élément Q de $\mathscr{P}$ est caractérisé par la fonctionnelle associée

$$\hat{Q}(g) = E_Q(\exp i\zeta_g), \tag{1.3}$$

où $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ est à support compact.

Nous notons $W_t^{1,2}$ l'ensemble des fonctionnelles F de $L^2(\Omega)$ $\mathscr{F}_t$-mesurables et L^2-différentiables au sens suivant (*cf.* [3]) : il existe un processus

$$(D_s F(\omega))_{0 \leqq s \leqq t} \in L^2((0, t) \times \Omega) \quad \text{tel que } \forall g \in L^2(\mathbb{R}_+)$$

on ait l'égalité dans L^2

$$D_g F(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\left(F\left(\omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} g(s)\, ds\right) - F(\omega)\right)$$

$$= \int_0^t g(s)\, D_s F(\omega)\, ds.$$

Notons que F étant $\mathscr{F}_t$-mesurable, $D_g F$ l'est aussi. De plus, si F est une fonctionnelle « régulière » du type $f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, où f est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, $t_1 < \ldots < t_n \leqq t$ et X est l'opérateur de projection canonique, alors

$$D_s F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n})\, 1_{[0, t_i]}(s).$$

Pour un processus adapté $u(s, \omega) \in L^2((0, t) \times \Omega)$ la notion suivante de différentiabilité sera utilisée : W_t est l'ensemble des processus $u \in L^2((0, t) \times \Omega)$ tels que $\forall s \leqq t$ on ait P-p. s. $u_s \in W_t^{1,2}$ et il existe une version bimesurable $D_r u_s$ telle que

$$\int_0^t \int_0^t D_r u_s^2\, dr\, ds \in L^2(\Omega).$$

1. Caractérisation de la mesure de Wiener. — Nous pouvons écrire maintenant la formule de base du calcul des variations stochastiques au sens de Malliavin [7], dite « formule d'intégration par parties », ébauchée par Hausmann [5] et énoncée par Bismut [1], (2.2) (*cf.* aussi [4]).

Proposition 1. — *Pour toute fonctionnelle* F *de* $W_t^{1,2}$ *et* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$E_P(F\zeta_g) = E_P(D_g F). \tag{1.5}$$

Remarquons que cela généralise les formules existant précédemment à l'intervalle de temps infini $\mathbb{R}_+$. Cependant la localisation s'effectue par l'intermédiaire de la $\mathscr{F}_t$-mesurabilité de F qui entraîne

$$E_P(F\zeta_g) = E_P(FE(\zeta_g \mid \mathscr{F}_t)) = E_P\left(F \int_0^t g(s)\, dX_s\right).$$

Remarquons aussi qu'en prenant $F \equiv 1$, respectivement $F = \zeta_f$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ à support dans $[0, t]$, on obtient deux propriétés typiques de la mesure de Wiener, à savoir $E_P(\zeta_g) = 0$ et $E_P(\zeta_f\, \zeta_g) = \int_{(0, t)} f(s)\, g(s)\, ds$. Notre but est de démontrer qu'en fait (1.5) caractérise complètement P dans $\mathscr{P}$.

Théorème 2. — *Soit* $Q \in \mathscr{P}$ *satisfaisant à*

$$E_Q(F\zeta_g) = E_Q(D_g F). \tag{1.6}$$

$\forall t > 0$, F *bornée de* $W_t^{1,2}$ *et* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Alors Q *est égale à la mesure de Wiener* P.

Preuve. — Tout d'abord les deux membres de (1.6) sont *a priori* bien définis puisque

$$|E_Q(F\zeta_g)|^2 \leqq \sup|F|^2 E_P(M_t^2)\int_0^t g^2(s)\,ds < +\infty \qquad \left(M_t = \frac{dQ}{dP}\bigg|_{\mathscr{F}_t}\right)$$

et

$$|E_Q(D_g F)| = |E_P(M_t D_g F)| \leqq E_P(M_t^2)\,E_P(D_g F^2) < +\infty.$$

Soient $Q \in \mathscr{P}$ et $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ à support compact inclus dans $[0, t]$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{Q}(\lambda g) = E_Q(i\zeta_g \exp(i\zeta_{\lambda g})).$$

En appliquant (1.6) à $F = i\exp(i\zeta_{\lambda g})$, on obtient

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{Q}(\lambda g) = E_Q(D_g(i\exp(i\zeta_{\lambda g}))) = -\lambda\int_0^t g^2(s)\,ds\,.\,\hat{Q}(\lambda g), \qquad \hat{Q}(0) = 1.$$

D'où $\hat{Q}(g) = \exp - \int_{\mathbb{R}_+} g^2(s)\,ds$, ce qui entraîne $\hat{Q} = \hat{P}$ et donc $Q = P$. ■

Nous étendons maintenant ce résultat à la caractérisation de processus de Wiener avec dérive.

2. Caractérisation de la mesure de Wiener avec dérive. — Considérons l'analogue de la formule (1.5) où P est remplacée par une loi $Q \in \mathscr{P}$. Comme dans [3] formule (4.5) ou [2] formule (3.5), on obtient un terme additionnel provenant de la dérive de Q par rapport à P :

Lemme 3. — *Soient* $t > 0$, $Q \in \mathscr{P}$ *avec* $M_t = dQ/dP|_{\mathscr{F}_t} \in W_t^{1,2}$, $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *et* $F \in W_t^{1,2}$. *Alors*

$$E_Q(F\zeta_g) = E_Q(D_g F) + E_Q(FD_g(\log M_t)). \tag{1.7}$$

Remarquons que tous les termes ci-dessus sont bien définis : les deux premiers apparaissaient déjà dans (1.6) et le dernier vaut

$$E_P(FD_g M_t) \leqq E_P(F^2)\,E_P(D_g M_t^2) < +\infty.$$

Puisque Q est absolument continue par rapport à P, il existe un processus adapté β, P-p. s. localement de carré intégrable, tel que M_t soit la martingale exponentielle construite à partir de ζ_β, *i.e.* la densité de Maruyama-Girsanov

$$M_t = \mathscr{E}_t(\beta) = \exp\left(\int_0^t \beta_s\,dX_s - (1/2)\int_0^t \beta_s^2\,ds\right)$$

(*cf.* [6] par exemple). Si $(\beta_s)_{s \leqq t} \in W_t$, alors $M_t \in W_t^{1,2}$ et la formule (1.7) peut s'écrire

$$E_Q(F\zeta_g) = E_Q(D_g F) + E_Q\left(F\left(\int_0^t g(s)\left(\beta_s + \int_s^t D_s\beta_r(dX_r - \beta_r\,dr)\right)ds\right)\right). \tag{1.8}$$

Remarque 4. — Dans le cas markovien $\beta_s(\omega) = b_s(\omega_s)$, si b_s est assez régulière, $D_s\beta_r(\omega) = b'_r(\omega_r)\,1_{s \leqq r \leqq t}$, expression que l'on peut incorporer à (1.8).

Nous montrons maintenant notre résultat principal, à savoir que l'équation (1.8) caractérise complètement la mesure Q.

THÉORÈME 5. — *Soient* $Q \in \mathscr{P}$ *et* β *un processus adapté tel que, pour tout* $t>0$, $(\beta_s)_{s \leq t} \in W_t$ *et* $E_P\left(\exp 1/2 \int_0^t \beta_s^2\, ds\right) < +\infty$ *(condition de Novikov). Si pour toute fonctionnelle bornée* $\in W_t^{1,2}$ *et tout* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, Q *satisfait à l'équation* (1.8), *alors* Q *est la loi de la diffusion brownienne de dérive* β.

Preuve. — Puisque $Q \in \mathscr{P}$, il existe un processus de dérive adapté γ tel que $dQ/dP\,|_{\mathscr{F}_t} = \mathscr{E}_t(\gamma)$ pour tout $t>0$ et $E_P(\mathscr{E}_t(\gamma)^2) < +\infty$. En comparant (1.7) où $M_t = \mathscr{E}_t(\gamma)$ et (1.8), on obtient pour tout $F \in W_t^{1,2}$ et $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$E_Q(FD_g(\log \mathscr{E}_t(\gamma))) = E_Q(FD_g(\log \mathscr{E}_t(\beta))),$$

la condition de Novikov assurant que $(\mathscr{E}_s(\beta))_{s \leq t}$ est une martingale de carré intégrable. D'où, pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$D_g \mathscr{E}_t(\gamma) = \mathscr{E}_t(\gamma) \,.\, D_g(\log \mathscr{E}_t(\beta)) \quad \text{P-p. s.}$$

En insérant cette égalité dans la formule (1.5), cela entraîne

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad E_P(\zeta_g \log \mathscr{E}_t(\gamma)) = E_P(\zeta_g \log \mathscr{E}_t(\beta)).$$

Par le théorème de représentation de la fonctionnelle $\log \mathscr{E}_t(\gamma) - \log \mathscr{E}_t(\beta)$ comme intégrale stochastique, on en déduit que

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad \forall t>0, \qquad \mathscr{E}_t(\gamma) = \mathscr{E}_t(\beta) \quad \text{P-p. s.},$$

donc β et γ sont indistinguables, ce qu'il fallait démontrer.

Nous tenons à remercier chaleureusement Patrick Cattiaux pour les idées intéressantes échangées avec lui sur ce sujet.

Note remise le 10 juin 1991, acceptée le 11 juin 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-M. BISMUT, Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions, *Z. Wahr. Ver. Geb.*, 56, 1981, p. 469-505.

[2] A. B. CRUZEIRO et J.-C. ZAMBRINI, Malliavin calculus and euclidean Quantum mechanics, I. Functional calculus, *J. Funct. Anal.*, 96, 1991, p. 62-95.

[3] H. FÖLLMER, Time reversal on Wiener space, *Stoch. Proc. Math. and Physics*, Springer Lecture Notes in Math., 1158, 1986, p. 119-129.

[4] B. GAVEAU et P. TRAUBER, L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel, *J. Funct. Anal.*, 46, 1982, p. 230-238.

[5] U. HAUSMANN, Functionals of Ito processes as stochastic integrals, *S.I.A.M. J. Control and Opt.*, 16, 1978, p. 252-269.

[6] R. S. LIPTSER et A. N. SHIRYAEV, On absolute continuity of measures corresponding to diffusion type processes with respect to a Wiener measure, *Izv. A.N. S.S.S.R.*, Ser. Matem., 36, n° 4, 1972, p. 874-889.

[7] P. MALLIAVIN, Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, *Proc. Int. Symp. Stoc. Dif. Equ.*, Kyoto 1976, Kinokuniya-Wiley, Tokyo, 1978.

[8] X. X. NGUYEN et H. ZESSIN, Integral and differential characterizations of the Gibbs Process, *Math. Nachr.*, 88, 1979, p. 105-115.

[9] S. ROELLY et H. ZESSIN, Sur la mécanique statistique d'une particule brownienne sur le tore, *Séminaire de Probabilités*, XXV, 1991.

S. R. : *Laboratoire de Probabilités, U.A. C.N.R.S.* n° 0224,
Université Paris-VI, Tour n° 56, 75252 *Paris Cedex* 05
adresse actuelle : *BiBoS, Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, D*-4800 *Bielefeld, Deutschland;*
H. Z. : *Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, D*-4800 *Bielefeld, Deutschland.*