

Institut für Mathematik
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Universität Potsdam

Die α -skalierte Brownsche Brücke: Einige Eigenschaften

Masterarbeit

von

Florian Hildebrandt
Matrikelnummer: 754498

November 2016

Betreut durch Prof. Dr. Sylvie Rœlly
Prof. Dr. Gilles Blanchard

Erstgutachterin Prof. Dr. Sylvie Rœlly
Zweitgutachterin Dr. Tania Kosenkova

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
1. Grundlagen und Vorbereitungen	3
1.1. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen	3
1.1.1. Borel-Cantelli-Lemma	3
1.1.2. Bedingte Erwartung und reguläre Version der bedingten Verteilung	4
1.1.3. Die Normalverteilungen	6
1.2. Stochastische Prozesse	7
1.2.1. Martingale, lokale Martingale und Semimartingale	8
1.2.2. Markovprozesse	10
1.2.3. Gaußsche Prozesse und Brownsche Bewegung	11
1.2.4. Der Raum $C[0, 1]$	12
1.3. Stochastische Analysis	13
1.3.1. Stochastische Integrale	13
1.3.2. Itô-Diffusionen	16
1.3.3. Das Girsanov-Theorem	18
2. Die α-skalierte Brownsche Brücke	22
2.1. Definition	23
2.2. Darstellung als Wiener Integral und Verteilungseigenschaften	23
2.3. Die Pfade verlaufen fast sicher von x nach y	28
2.4. Äquivalenz zum Wienermaß und Girsanov-Dichte	35
3. Ist die α-skalierte Brownsche Brücke wirklich eine Brücke?	39
3.1. Markovbrücken	39
3.1.1. Brücken einer Itô-Diffusion und ihre Charakterisierung	43
3.2. Die α -skalierte Brownsche Brücke ist für $\alpha \neq 1$ nicht Brücke eines Gauß-Markov-Prozesses	49
3.3. Die α -skalierte Brownsche Brücke ist für $\alpha \neq 1$ nicht Brücke einer Itô-Diffusion	60
4. Schätzung von α	63
4.1. Vorbereitung: Laplace-Transformation der für den MLS relevanten Funktionale	65
4.2. Starke Konsistenz des MLS	69
4.3. Der Bias des MLS	70
4.4. Ausblick	75
Anhang A. Funktionen von endlicher Variation	76
Anhang B. Dynkinscher π-λ-Satz	76

Notation

\mathbb{N}	$\{1, 2, \dots\}$
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}_+	$[0, \infty)$
$s \wedge t$	$\min(s, t)$ für $s, t \in \mathbb{R}$
$\mathcal{B}(\mathcal{X})$	Die Borelsche σ -Algebra eines topologischen Raumes \mathcal{X}
$C(\mathcal{X})$	Die Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum \mathcal{X}
$C^{m,k}(I \times \mathbb{R})$	Die Menge aller Funktionen $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in I$ die Funktion $f(t, \cdot)$ k -mal und für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(\cdot, x)$ m -mal stetig differenzierbar ist, wobei $I \subset \mathbb{R}_+$ ein Intervall sei

0. Einleitung

Vorliegende Arbeit befasst sich mit einigen Eigenschaften der α -skalierten Brownschen Brücke. Dabei handelt es sich um einen stochastischen Prozess, der als die eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{cases} dX_t &= \alpha \frac{y - X_t}{1 - t} dt + dB_t, & t \in [0, 1) \\ X_0 &= x \end{cases} \quad (1)$$

für gewisse $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ definiert ist, wobei B eine Brownsche Bewegung bezeichne. Für $\alpha = 1$ stimmt dieser Prozess mit der Brownschen Brücke zwischen x und y überein. Genau wie die Brownsche Brücke zeigt der durch (1) gegebene Prozess auch für $\alpha \neq 1$ das Verhalten

$$\lim_{t \nearrow 1} X_t = y \quad \text{f.s.} \quad (2)$$

Wie wir an der definierenden Gleichung (1) erkennen können, ist der Drift, der dieses Verhalten erzeugt, umso stärker, je größer der Parameter α ist. Diese Flexibilität macht die α -skalierte Brownsche Brücke für Modellierungszwecke interessant.

Die α -skalierte Brownsche Brücke wurde erstmals von Brennan und Schwartz [BS90] zur Modellierung der zeitlichen Entwicklung des Arbitrageprofits, der sich mittels Aktienindex-Terminkontrakten erzielen lässt, verwendet. Einzug in die mathematische Literatur fand die α -skalierte Brownsche Brücke durch Mansuy [Man04] unter dem Namen *α -Brownian Bridge*. Seitdem beschäftigten sich eine Reihe weiterer Autoren mit den mathematischen Eigenschaften des Prozesses (1). Neben [Man04] spielen die folgenden Artikel für die vorliegende Arbeit eine Rolle: Barczy und Pap beschäftigen sich in [BP10a] mit Pfadeigenschaften und zeigen die paarweise Singularität der Verteilungen von (1) für verschiedene Werte von α . In [BP10b] studieren sie asymptotische Eigenschaften des Maximum-Likelihood-Schätzers für α . Für diesen Schätzer bestimmen Görgens und Thulin in [GT14] den Bias und schlagen eine Bias-Korrektur vor. Wir weisen darauf hin, dass sich eben genannte Autoren lediglich mit dem Spezialfall $x = y = 0$ in (1) befassen. Barczy und Pap bezeichnen den Prozess (1) als *α -Wiener Bridge*. Wie wir später sehen werden, handelt es sich bei diesem Prozess jedoch nicht um die Brücke eines Markovprozesses. Daher ist die Bezeichnung α -Brownian (Wiener) Bridge etwas irreführend und wir verwenden die Bezeichnung α -skalierte Brownsche Brücke.

Vorliegende Arbeit ist in vier Abschnitte gegliedert. Abschnitt 1 stellt die benötigten wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe und Werkzeuge zusammen, die in vorliegender Arbeit verwendet werden. In Abschnitt 2 werden grundlegende Eigenschaften der α -skalierten Brownschen Brücke analysiert: Wir präsentieren eine explizite Lösungsformel für Gleichung (1) und identifizieren die α -skalierte Brownsche Brücke als Gaußschen Prozess mit gewissen ersten zwei Momenten. Anschließend führen wir einen bisher nicht in der Literatur vorhandenen Beweis der Eigenschaft (2). Dieser Beweis ist recht elementar und basiert auf der Doobschen Maximalungleichung für Martingale sowie

dem Borel-Cantelli-Lemma. Schließlich zeigen wir mittels des Girsanov-Theorems die Äquivalenz der Verteilung der α -skalierten Brownschen Brücke zum Wienermaß auf $C[0, T]$ für beliebiges $T \in (0, 1)$. In Abschnitt 3 beschäftigen wir uns mit der Frage, ob die α -skalierte Brownsche Brücke als Brücke eines stetigen Markovprozesses Z mit strikt positiver Übergangsdichte $p(s, w; t, z)$, $w, z \in \mathbb{R}$, $0 \leq s < t \leq 1$ aufgefasst werden kann, wobei wir unter einer solchen Brücke einen stetigen Markovprozess $Z^{x,y}$ mit Übergangsdichte

$$p^y(s, w; t, z) = \frac{p(s, w; t, z)p(t, z; 1, y)}{p(s, w; 1, y)}, \quad w, z \in \mathbb{R}$$

für $0 \leq s < t \leq 1$ und der Eigenschaft $Z_0^{x,y} = x$ sowie $Z_1^{x,y} = y$ f.s. verstehen. Ausgangspunkt dieser Fragestellung ist die bekannte Tatsache, dass die (1-skalierte) Brownsche Brücke als Brücke der Brownschen Bewegung aufgefasst werden kann. Mansuy zeigt in [Man04], dass die α -skalierte Brownsche Brücke für $\alpha \neq 1$ nicht Brücke eines zeit-homogenen und zentrierten Gaußschen Markovprozesses ist. Wir verallgemeinern in vorliegender Arbeit dieses Resultat auf allgemeine Gaußsche Markovprozesse sowie auf eine gewisse Klasse von Itô-Diffusionen. Der Beweis dieser Verallgemeinerung beruht im Gaußschen Fall auf Eigenschaften der Kovarianzstruktur Gaußscher Prozesse sowie im Falle der Itô-Diffusionen auf dem von Clark [Cla91] entwickelten Begriff der *reziproken Charakteristik*. Im 4. Abschnitt beschäftigen wir uns schließlich mit der statistischen Schätzung des Parameters α auf Basis einer kontinuierlich beobachteten Realisierung $\{\xi_t, t \in [0, T]\}$ einer α -skalierten Brownschen Brücke für gewisses $T \in (0, 1)$, wobei α unbekannt sei. Durch Maximierung der Girsanov-Dichte bzgl. des Wienermaßes in α erhalten wir einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\alpha}_T$. Hauptergebnis dieses Abschnittes ist die Verallgemeinerung gewisser für den Fall $x = y = 0$ bekannter Eigenschaften dieses Schätzers (s. [BP10b], [GT14]) auf allgemeine $x, y \in \mathbb{R}$: Basierend auf der gemeinsamen Laplace-Transformation zweier Funktionale der α -skalierten Brownschen Brücke zeigen wir die starke Konsistenz von $\hat{\alpha}_T$ für $T \nearrow 1$ und bestimmen die (nicht-asymptotische) Verzerrung von $\hat{\alpha}_T$.

1. Grundlagen und Vorbereitungen

Wir betrachten einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Wir verwenden die Notation

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}$$

für den Erwartungswert einer \mathbf{P} -integrierbaren Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Mit **Var** bzw. **Cov** bezeichnen wir die Varianz bzw. Kovarianz bezüglich \mathbf{P} .

1.1. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Im Folgenden sind die für das Verständnis vorliegender Arbeit benötigten Aussagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammengestellt. Dabei handelt es sich um elementare Resultate, wie sie in den meisten Büchern über Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden sind.

1.1.1. Borel-Cantelli-Lemma

Für eine Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ definieren wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Dieses Ereignis besteht genau aus denjenigen $\omega \in \Omega$, die in unendlich vielen der A_i , $i \in \mathbb{N}$ liegen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ ist häufig die folgende Proposition hilfreich.

Proposition 1.1 (Borel-Cantelli-Lemma). *Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Ereignissen in \mathcal{F} , so dass*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i] < \infty.$$

Dann gilt

$$\mathbf{P}\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right] = 0.$$

Beweis. Wegen monotoner Konvergenz gilt

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_i}] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i] < \infty.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i} < \infty \quad \text{f.s.,}$$

also treten fast sicher nur endlich viele der Ereignisse $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein. □

Nehmen wir zusätzlich an, dass die Ereignisse $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind, so gilt auch die Umkehrung obiger Proposition: Aus $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i] = \infty$ folgt in diesem Fall $\mathbf{P}[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n] = 1$, siehe z.B. [Kle13, S. 53]. Diese Aussage werden wir in vorliegender Arbeit jedoch nicht benötigen.

1.1.2. Bedingte Erwartung und reguläre Version der bedingten Verteilung

In diesem Abschnitt folgen wir der Darstellung in [Kle13, Kapitel 8]. Dorthin sei auch für Beweise der hier formulierten Aussagen verwiesen. Wir betrachten eine integrierbare Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und eine σ -Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Definition 1.2. Eine Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{G} , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Y ist \mathcal{G} -messbar.
- (ii) Für alle $A \in \mathcal{G}$ gilt $\mathbf{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X]$.

In diesem Falle schreiben wir $Y = \mathbf{E}[X | \mathcal{G}]$. Ist speziell $X = \mathbf{1}_B$ für ein Ereignis $B \in \mathcal{F}$, so schreiben wir $Y = \mathbf{P}[B | \mathcal{G}]$ und nennen Y bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben \mathcal{G} .

Man kann zeigen, dass bedingte Erwartungen immer existieren und bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt sind. Wir benötigen die folgenden beiden Rechenregeln für den bedingten Erwartungswert:

- Es gilt $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X | \mathcal{F}]] = \mathbf{E}[X]$.
- Ist $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable, so dass GX integrierbar ist, dann gilt

$$\mathbf{E}[GX | \mathcal{G}] = G \mathbf{E}[X | \mathcal{G}] \quad \text{f.s.}$$

Die erste Regel folgt, indem man im Punkt (ii) der Definition des bedingten Erwartungswertes $A = \Omega$ wählt. Die zweite Regel gilt offensichtlich im Falle $G = \mathbf{1}_A$ für eine Menge $A \in \mathcal{G}$. Den allgemeinen Fall kann man daraus durch Approximation von G mit einfachen Funktionen folgern.

Häufig ist von besonderem Interesse der Fall $\mathcal{G} = \sigma(U)$ für eine auf Ω definierte Zufallsvariable U mit Werten in einem Messraum (S, \mathcal{S}) . Wir schreiben dann abkürzend $\mathbf{E}[X | U]$ für $\mathbf{E}[X | \sigma(U)]$. Da $\mathbf{E}[X | U]$ nach Definition messbar bezüglich $\sigma(U)$ ist, können wir gemäß des Doob-Dynkin-Lemmas (siehe z.B. [Kle13, S. 40]) $\mathbf{E}[X | U] = \varphi(U)$ für eine \mathcal{S} -messbare Funktion $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben. Diese Tatsache erlaubt es, $\mathbf{E}[X | U = u] = \varphi(u)$ für $\mathbf{P} \circ U^{-1}$ -fast alle $u \in S$ zu definieren.

Wir kommen nun zu der Frage, ob bedingte Wahrscheinlichkeiten tatsächlich Wahrscheinlichkeitsmaße sind.

Definition 1.3. Sei (E, \mathcal{E}) ein Messraum und $Z : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ eine Zufallsvariable. Eine Funktion $\kappa : \Omega \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften

- (i) für alle $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung $A \mapsto \kappa(\omega, A)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (E, \mathcal{E}) ,
- (ii) für alle $A \in \mathcal{E}$ ist die Abbildung $\omega \mapsto \kappa(\omega, A)$ messbar bzgl. \mathcal{F} ,

heißt reguläre Version der bedingten Verteilung von Z gegeben \mathcal{G} , falls für alle $C \in \mathcal{E}$

$$\kappa(\cdot, C) = \mathbf{P}[\{Z \in C\} | \mathcal{G}] \quad \text{f.s.}$$

gilt. Im Falle $(E, \mathcal{E}) = (\Omega, \mathcal{F})$ und $Z = \text{Id}$ nennen wir κ eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit von \mathbf{P} gegeben \mathcal{G} .

Die Schwierigkeit bei der Konstruktion einer regulären Version der bedingten Verteilung besteht darin, dass $\mathbf{P}[Z \in C | \mathcal{G}]$ nur bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt ist und diese Nullmengen a priori von C abhängen können. Dennoch kann man die Existenz einer regulären Version der bedingten Verteilung sicherstellen, wenn man für (E, \mathcal{E}) genügend Regularität voraussetzt:

Proposition 1.4. *Ist der Raum E aus Definition 1.3 polnisch, d.h. ein vollständig metrisierbarer, separabler topologischer Raum, und \mathcal{E} seine Borelsche σ -Algebra, dann existiert eine reguläre Version der bedingten Verteilung von Z gegeben \mathcal{G} .*

Im folgenden für vorliegende Arbeit wichtigen Spezialfall lässt sich eine reguläre Version der bedingten Verteilung konkret angeben.

Beispiel 1.5. Seien $X \in \mathbb{R}^n$ und $Y \in \mathbb{R}^m$ Zufallsvektoren mit gemeinsamer strikt positiver Lebesgue-Dichte $f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$$

die Lebesgue-Dichte von X . Dann hat eine reguläre Version der bedingten Verteilung von Y gegeben $X = x$ die Dichte

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},$$

d.h. für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\mathbf{P}[Y \in A | X = x] = \int_A \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \quad \text{für } \mathbf{P} \circ X^{-1}\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

1.1.3. Die Normalverteilungen

Nun befassen wir uns mit den für unsere Zwecke benötigten Eigenschaften einer konkreten Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, den Normalverteilungen. Eine reellwertige Zufallsvariable Z heißt normalverteilt (oder Gaußsch), falls sie konstant ist oder die Lebesgue-Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

für gewisse $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ besitzt. In diesem Falle gilt

$$\mu = \mathbf{E}[Z], \quad \sigma^2 = \mathbf{Var}[Z].$$

Dass die Klasse der Normalverteilungen abgeschlossen unter Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist, ist Inhalt der folgenden Proposition.

Proposition 1.6. *Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge normalverteilter Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Ist X eine weitere Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so dass für alle $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}[|X_n - X| > \varepsilon] \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt, so ist auch X normalverteilt und es gilt für alle $p \in [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{in } L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}).$$

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [Nev68, S. 16]. □

Sei nun $d \in \mathbb{N}$. Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ heißt d -dimensional normalverteilt, falls für alle $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ die Linearkombination

$$c_1 X_1 + \dots + c_d X_d$$

normalverteilt ist. Wir schreiben dann $X \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$, wobei $\mu = \mathbf{E}[X]$ und Σ die Kovarianzmatrix von X sei, d.h. $\Sigma_{ij} = \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$ für $1 \leq i, j \leq d$. Falls Σ regulär ist, besitzt X die Lebesgue-Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{\mu, \Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3)$$

Ein Beweis dieser Tatsache ist zum Beispiel in [Mui82, S. 9] zu finden. Folgendes Lemma zeigt, dass Bedingen in Gaußschen Vektoren die Normalverteilungseigenschaft erhält.

Lemma 1.7. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $X = (Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_m)^T \sim \mathcal{N}_{n+m}(\mu, \Sigma)$, wobei*

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

mit $\mu_1 \in \mathbb{R}^n, \mu_2 \in \mathbb{R}^m, \Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann gilt

(i) Y und Z sind genau dann unabhängig, wenn $\Sigma_{12} = 0$.

(ii) Sei Σ (und damit auch Σ_{22}) positiv definit. Seien $f_{\mu, \Sigma}$ bzw. $f_{\mu_2, \Sigma_{22}}$ die Dichten von X bzw. Z . Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{f_{\mu, \Sigma}((y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)^T)}{f_{\mu_2, \Sigma_{22}}(z)} = f_{\tilde{\mu}(z), \tilde{\Sigma}}(y),$$

wobei

$$\tilde{\mu}(z) = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(z - \mu_2), \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}. \quad (4)$$

Insbesondere ist eine reguläre Version der bedingten Verteilung $\mathbf{P}[Y \in \cdot | Z]$ gegeben durch $\mathcal{N}_n(\tilde{\mu}(Z), \tilde{\Sigma})$. Weiter gelten die Formeln für bedingten Erwartungswert und Varianz auch, falls Σ singulär ist, solange zumindest Σ_{22} regulär ist.

Beweis. Für einen Beweis verweisen wir auf z.B. [Mui82]. □

Wir weisen auf die bemerkenswerte Tatsache hin, dass die bedingte Kovarianzmatrix $\tilde{\Sigma}$ unabhängig von Z ist.

Folgt $(Y, Z) \in \mathbb{R}^2$ speziell einer 2-dimensionalen zentrierten Normalverteilung, $(Y, Z) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$ mit Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_Z^2 > 0$, dann gilt mit obiger Proposition

$$\mathbf{E}[Y | Z] = \frac{\sigma_{YZ}}{\sigma_Z^2} Z \quad \text{f.s.} \quad (5)$$

1.2. Stochastische Prozesse

Im Folgenden sei $I = \mathbb{R}_+, I = [0, T]$ oder $I = [0, T)$ für ein $T > 0$. Unter einem stochastischen Prozess verstehen wir eine Familie $X = \{X_t, t \in I\}$ von Zufallsvariablen

$$X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in I.$$

Wir nennen einen stochastischen Prozess X stetig, falls die Abbildung

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in I$$

für \mathbf{P} -fast alle $\omega \in \Omega$ stetig ist.

Wir gehen nun davon aus, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit einer Filtration, d.h. einer Familie von σ -Algebren $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{für } s \leq t,$$

versehen ist. Ein stochastischer Prozess $\{X_t, t \in I\}$ heißt adaptiert (an $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$), falls für alle $t \in I$ die Zufallsvariable X_t messbar bzgl. \mathcal{F}_t ist. Ein stochastischer Prozess X ist stets an die von X induzierte Filtration

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t), \quad t \in I$$

adaptiert. Manchmal werden wir aus technischen Gründen voraussetzen, dass eine Filtration die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

1. \mathcal{F}_0 ist \mathbf{P} -vollständig.
2. Die Filtration ist rechtsstetig, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so sprechen wir von einer Standardfiltration.

Im Folgenden werden wir diejenigen Klassen von stochastischen Prozessen einführen, die in vorliegender Arbeit eine Rolle spielen. Anschließend führen wir den Raum $C(I)$ der stetigen Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$ ein. Das ermöglicht uns, einen stochastischen Prozess X als eine einzige Zufallsvariable mit Werten in $C(I)$ aufzufassen.

1.2.1. Martingale, lokale Martingale und Semimartingale

Definition 1.8. Sei $X = \{X_t, t \in I\}$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit der Eigenschaft $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ für alle $t \in I$. X heißt Martingal, falls

$$\mathbf{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{f.s. für alle } s \leq t \quad (6)$$

erfüllt ist. Gilt anstelle von (6) immerhin die schwächere Bedingung $\mathbf{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ f.s. für alle $s \leq t$, so sprechen wir von einem Supermartingal.

Wir benötigen die folgende wichtige Ungleichung für Martingale:

Proposition 1.9 (Doobsche Maximalungleichung). *Sei $T > 0$ und $\{X_t, t \in [0, T]\}$ ein stetiges Martingal. Dann gilt für alle $\lambda > 0$*

$$\mathbf{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t| \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{E} [X_T^2]. \quad (7)$$

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [RY94, S. 52]. □

In Verallgemeinerung des Martingalbegriffs definieren wir nun lokale Martingale. Vorbereitend brauchen wir die folgenden Begriffe: Eine Stoppzeit ist eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit der Eigenschaft $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$. Für einen stochastischen Prozess X definieren wir den gestoppten Prozess X^τ durch $X_t^\tau(\omega) = X_{\tau(\omega) \wedge t}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in I$.

Definition 1.10. Ein stochastischer Prozess $X = \{X_t, t \in I\}$ heißt stetiges lokales Martingal, falls X_0 messbar bzgl. \mathcal{F}_0 ist und eine Folge $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \sup(I)$ f.s. existiert, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ der Prozess

$$X^k := X^{\tau_k} - X_0$$

ein stetiges Martingal ist.

Wir brauchen folgendes Kriterium für die zeitliche Konstanz stetiger lokaler Martingale. Hier taucht der Begriff der *endlichen Variation* einer Funktion auf. Zur Erinnerung ist die zugehörige Definition im Anhang A zu finden.

Lemma 1.11. *Sei X ein stetiges lokales Martingal und f.s. von endlicher Variation. Dann gilt*

$$\mathbf{P}[X_t = X_0 \text{ für alle } t \in I] = 1.$$

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [Dur96, S. 43]. □

Obiges Lemma zeigt, dass der Begriff der endlichen Variation für die Theorie lokaler Martingale nicht sinnvoll ist. Für lokale Martingale wurde allerdings von Paul-André Meyer der Begriff der quadratischen Variation entwickelt, der in folgender Proposition eingeführt wird.

Proposition 1.12. *Für ein stetiges lokales Martingal X existiert ein eindeutig bestimmter stetiger und monoton wachsender Prozess $\langle X \rangle$ mit $\langle X \rangle_0 = 0$ f.s., so dass $X^2 - \langle X \rangle$ ein stetiges lokales Martingal ist. $\langle X \rangle$ heißt quadratischer Variationsprozess von X .*

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [Dur96, S. 42 ff.]. □

Wir fahren fort mit der Verallgemeinerung des Martingalbegriffs und definieren:

Definition 1.13. Ein stochastischer Prozess $X = \{X_t, t \in I\}$ heißt stetiges Semimartingal, falls eine Zerlegung

$$X_t = M_t + A_t, \quad t \in I \tag{8}$$

existiert, so dass $M = \{M_t, t \in I\}$ ein stetiges lokales Martingal und $A = \{A_t, t \in I\}$ ein adaptierter Prozess von endlicher Variation mit $A_0 = 0$ f.s. ist.

Die Zerlegung (8) in obiger Definition ist eindeutig bestimmt, denn ist $X_t = \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$ eine weitere Zerlegung mit den geforderten Eigenschaften, so ist $M - \tilde{M} = \tilde{A} - A$ ein stetiges lokales Martingal und von endlicher Variation, also nach Lemma 1.11 f.s. konstant gleich $\tilde{A}_0 - A_0 = 0$.

1.2.2. Markovprozesse

Ein Markovprozess ist ein stochastischer Prozess, dessen zukünftiges Verhalten nur durch die Gegenwart von der Vergangenheit abhängt:

Definition 1.14. Ein adaptierter stochastischer Prozess $\{X_t, t \in I\}$ heißt Markovprozess, falls

$$\mathbf{P}[B | \mathcal{F}_t] = \mathbf{P}[B | X_t] \quad \text{f.s.} \quad (9)$$

für alle $B \in \mathcal{F}'_t$ und $t \in I$ gilt, wobei

$$\mathcal{F}'_t := \sigma(X_s, s \geq t), \quad t \in I.$$

Eine zu (9) äquivalente Charakterisierung von Markovprozessen, die wir in vorliegender Arbeit benutzen werden, lautet

$$\mathbf{P}[A \cap B | X_t] = \mathbf{P}[A | X_t] \mathbf{P}[B | X_t] \quad \text{f.s.} \quad (10)$$

für alle $A \in \mathcal{F}_t$ und $B \in \mathcal{F}'_t$, siehe [Doo53, Kapitel II.6]. Diese Charakterisierung lässt sich folgendermaßen heuristisch interpretieren: *Bei gegebener Gegenwart sind Vergangenheit und Zukunft unabhängig.*

Konkrete Markovprozesse sind häufig durch Übergangsfunktionen gegeben. Eine Übergangsfunktion ist eine Familie $\{P_{s,t}, s, t \in I \text{ mit } s < t\}$ von Abbildungen

$$P_{s,t} : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad s, t \in I \text{ mit } s < t$$

mit den Eigenschaften

- (i) $x \mapsto P_{s,t}(x, B)$ ist messbar für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
- (ii) $B \mapsto P_{s,t}(x, B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (iii) für alle $s, v, t \in I$ mit $s < v < t$ gilt die Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$P_{s,t}(x, B) = \int P_{s,v}(x, dy) P_{v,t}(y, B), \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Wir sagen, dass der Markovprozess X die Übergangsfunktion $\{P_{s,t}, s, t \in I \text{ mit } s < t\}$ hat, falls für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und alle $s, t \in I$ mit $s < t$

$$\mathbf{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = P_{s,t}f(X_s) := \int P_{s,t}(X_s, dy) f(y) \quad \text{f.s.}$$

gilt. Ist eine Übergangsfunktion für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ durch

$$P_{s,t}(\cdot, dy) = p(s, \cdot; t, y) m(dy)$$

für ein σ -endliches Maß m und eine Familie positiver, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -messbarer Funktion $p = \{p(s, \cdot; t, \cdot), s, t \in I \text{ mit } s < t\}$ gegeben, so nennen wir p eine Übergangsdichte. Für unsere Zwecke wird die folgende Charakterisierung wichtig sein:

Proposition 1.15. X ist genau dann bzgl. $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t), t \in I$, ein Markovprozess mit m -Übergangsdichte p und $\mathbf{P}[X_0 = x] = 1$, wenn $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ die $m \otimes \dots \otimes m$ -Dichte

$$g_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = p(0, x; t_1, x_1)p(t_1, x_1; t_2, x_2) \cdots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) \quad (11)$$

für $0 < t_1 < \dots < t_n$ besitzt.

Beweis. Die Aussage ist eine direkte Folgerung aus Proposition 1.4 in [RY94, Kapitel III]. \square

1.2.3. Gaußsche Prozesse und Brownsche Bewegung

Definition 1.16. Ein stochastischer Prozess $\{X_t, t \in I\}$ heißt **Gaußscher Prozess**, falls seine endlichdimensionalen Verteilungen einer Normalverteilung folgen, d.h. wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $t_1, \dots, t_n \in I$ der Vektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$ n -dimensional normalverteilt ist.

Wir erinnern nun an die Definition des bekanntesten Vertreters Gaußscher Prozesse.

Definition 1.17. Ein adaptierter stochastischer Prozess $\{B_t, t \in I\}$ heißt (standard) Brownsche Bewegung, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $B_0 = 0$ f.s.
- (ii) B ist ein stetiger Prozess.
- (iii) Für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s und es gilt

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Bemerkung 1.18. Das Wort *standard* in obiger Definition bezieht sich auf die Anfangsbedingung $B_0 = 0$. Wir werden in vorliegender Arbeit unter einer Brownschen Bewegung stets eine standard Brownsche Bewegung verstehen.

Aus Proposition 1.15 folgt, dass eine Brownsche Bewegung B bzgl. $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t), t \in I$, ein Markovprozess mit Lebesgue-Übergangsdichte

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right), \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (12)$$

für $s, t \in I$ mit $s < t$ ist. Außerdem ist eine Brownsche Bewegung ein Gaußscher Prozess mit den Momenten

$$\mathbf{E}[B_t] = 0, \quad \mathbf{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t, \quad s, t \in I$$

sowie ein Martingal mit quadratischem Variationsprozess

$$\langle B \rangle_t = t, \quad t \in I.$$

Für einen Beweis dieser Tatsachen sei auf z.B. [Dur96] verwiesen.

Ein weiteres bekanntes Beispiel Gaußscher Prozesse ist die Brownsche Brücke. Bei der α -skalierten Brownschen Brücke, dem zentralen Untersuchungsobjekt vorliegender Arbeit, handelt es sich um eine Verallgemeinerung dieses Prozesses.

Definition 1.19. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Eine Brownsche Brücke zwischen x und y ist ein stetiger Gaußscher Prozess $X = \{X_t, t \in [0, 1]\}$ mit den Momenten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_t] &= ty + (1-t)x, \\ \mathbf{Cov}(X_s, X_t) &= s \wedge t - st,\end{aligned}$$

für $s, t \in [0, 1]$.

1.2.4. Der Raum $C[0, 1]$

Die folgende Darstellung basiert auf [Kle13]. Wir betrachten den Raum

$$C(I) = \{\omega : I \rightarrow \mathbb{R}, \omega \text{ ist stetig}\}.$$

Auf $C(I)$ definieren wir die Familie der Projektionen

$$X_t : C(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \omega_t, \quad t \in I.$$

Wir versehen $C(I)$ mit der kanonischen σ -Algebra

$$\mathcal{F}^0 = \sigma(X_s, s \in I)$$

und der kanonischen Filtration

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leq t), \quad t \in I.$$

Man kann zeigen, dass \mathcal{F}^0 der Borelschen σ -Algebra von $C(I)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, entspricht. Daher schreiben wir auch $\mathcal{F}^0 = \mathcal{B}(C(I))$. Mit dieser Topologie ist $C(I)$ polnisch. Insbesondere existiert für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(C(I), \mathcal{F}^0)$ und jede σ -Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^0$ eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(\cdot | \mathcal{G})$. Da das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \{\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\} \mid t_i \in I, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$$

ein schnittstabiler Erzeuger von \mathcal{F}^0 ist, ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(C(I), \mathcal{B}(C(I)))$ eindeutig durch seine endlichdimensionalen Verteilungen,

$$P \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}, \quad t_1, \dots, t_n \in I, n \in \mathbb{N}$$

bestimmt. Insbesondere ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß P , unter dem X ein Gaußscher Prozess ist, eindeutig durch die beiden Momentenfunktionen

$$t \mapsto E_P(X_t), \quad (s, t) \mapsto \text{Cov}_P(X_s, X_t), \quad s, t \in I,$$

bestimmt. Ist der Prozess X unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P eine Brownsche Bewegung, so nennen wir P das Wienermaß und schreiben $P = \mathbf{W}$. Ist für ein $x \in \mathbb{R}$ der Prozess $\{X_t - x, t \in I\}$ eine Brownsche Bewegung unter P , so schreiben wir $P = \mathbf{W}^x$. Ist der Prozess X unter P eine Brownsche Brücke zwischen x und y , so schreiben wir $P = \mathbf{W}^{x,y}$.

Die Filtration $\{\mathcal{F}_t^0, t \in I\}$ ist im Allgemeinen keine Standardfiltration unter dem Wienermaß. Um Propositionen, die diese Eigenschaft voraussetzen, trotzdem anwenden zu können, gehen wir folgendermaßen vor: Wir setzen

$$\mathcal{N} = \{B \subset C(I) \mid \text{es existiert } A \in \mathcal{F}^0 : B \subset A \text{ und } \mathbf{W}^x(A) = 0\}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sigma(\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{N}), \\ \mathcal{F}_t &= \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}), \quad t \in I. \end{aligned}$$

Dann ist $(C(I), \mathcal{F}, \mathbf{W}^x)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ eine Standardfiltration. Außerdem ist der Prozess $\{X_t - x, t \in I\}$ auch nach diesen Modifikationen eine Brownsche Bewegung. Für einen Beweis dieser Tatsachen verweisen wir auf [KS91, Kapitel 2.7].

Schließlich bemerken wir, dass wir (nach eventueller Abänderung auf einer Nullmenge) einen stetigen stochastischen Prozess $Y = \{Y_t, t \in I\}$ auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbf{P})$ als Zufallsvariable

$$Y : (\Omega, \mathcal{H}, \mathbf{P}) \rightarrow (C(I), \mathcal{F}^0)$$

auffassen können: Ist $A \in \mathcal{A}$, also $A = \{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\}$ für gewisse $t_i \in I$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $i = 1, \dots, n$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\{Y \in A\} = \{Y_{t_1} \in B_1, \dots, Y_{t_n} \in B_n\} \in \mathcal{H}.$$

Aus $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}^0$ folgt nun, dass Y messbar ist und wir können die Verteilung von Y als das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P} \circ Y^{-1}$ auf $(C(I), \mathcal{B}(C(I)))$ definieren. Diese Beobachtung erlaubt es, jeden stetigen stochastischen Prozess Y in der so genannten kanonischen Darstellung, gegeben durch den Koordinatenprozess X auf $(C(I), \mathcal{B}(C(I)), \mathbf{P} \circ Y^{-1})$, zu realisieren.

1.3. Stochastische Analysis

1.3.1. Stochastische Integrale

Die Konstruktion des stochastischen Integrals (unter der Brownschen Bewegung) setzen wir als bekannt voraus bzw. verweisen auf z.B. [Dur96]. Im Folgenden sind einige

elementare Eigenschaften des stochastischen Integrals zusammengestellt. Alle folgenden Aussagen sind [CW90], [Dur96] bzw. [Dec05] entnommen.

Sei $T > 0$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum versehen mit einer Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ und einer Brownschen Bewegung $\{B_t, t \in [0, T]\}$. Wir betrachten das Itô-Integral

$$Y_t := \int_0^t X_r dB_r, \quad t \leq T.$$

Der Integrand $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei progressiv messbar, d.h. für alle $t \in [0, T]$ sei die Abbildung

$$[0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

messbar bzgl. $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}[0, t]$. Außerdem gelte

$$\mathbf{P} \left[\int_0^T X_r^2 dr < \infty \right] = 1. \quad (13)$$

Der Prozess $Y = \{Y_t, t \in [0, T]\}$ ist stets ein stetiges lokales Martingal und der zugehörige quadratische Variationsprozess ist gegeben durch

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds. \quad (14)$$

Ersetzen wir (13) durch die stärkere Voraussetzung

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T X_r^2 dr \right] < \infty, \quad (15)$$

so ist Y sogar ein zentriertes Martingal und es gilt die Itô-Isometrie

$$\mathbf{E} \left[\left(\int_0^T X_r dB_r \right)^2 \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^T X_r^2 dr \right]. \quad (16)$$

Sind U und V progressiv messbare Prozesse, die (15) erfüllen, so ist

$$\left(\int_0^t U_r dB_r \right) \left(\int_0^t V_r dB_r \right) - \int_0^t U_r V_r dr, \quad t \leq T$$

ebenfalls ein zentriertes Martingal. Diese Tatsache erlaubt es insbesondere, die Kovarianzfunktion des Prozesses $\int_0^t U_r dB_r$ zu berechnen: Sei dazu $0 \leq s \leq t \leq T$ und setze $V = U \mathbf{1}_{[0, s]}$. Dann gilt

$$\mathbf{E} \left[\left(\int_0^t U_r dB_r \right) \left(\int_0^t V_r dB_r \right) - \int_0^t U_r V_r dr \right] = 0.$$

Wegen $\int_0^t V_r dB_r = \int_0^s U_r dB_r$ folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov} \left(\int_0^s U_r dB_r, \int_0^t U_r dB_r \right) &= \mathbf{E} \left[\left(\int_0^t V_r dB_r \right) \left(\int_0^t U_r dB_r \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_0^t U_r^2 \mathbf{1}_{[0,s]}(r) dr \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^s U_r^2 dr \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Schließlich bemerken wir, dass

$$\int_0^T f(s) dB_s \sim \mathcal{N} \left(0, \int_0^T f(s)^2 ds \right) \quad (18)$$

im Falle deterministischer Integranden $f \in L^2([0, T], \mathcal{B}[0, T], dx)$ gilt. In diesem Falle nennt man das stochastische Integral auch Paley-Wiener Integral.

Mit Itô-Integralen lassen sich stetige Semimartingale $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

konstruieren. Dabei sei X_0 eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsvariable und u und v seien progressiv-messbare Prozesse, die \mathbf{P} -f.s

$$\int_0^T |u_s| + v_s^2 ds < \infty$$

erfüllen. Solche Semimartingale nennt man Itô-Prozess. Man schreibt abkürzend auch

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t.$$

Ist $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, so ist auch $\{F(t, X_t), t \in [0, T]\}$ ein Itô-Prozess und es gilt die Itô-Formel,

$$dF(t, X_t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + u_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} v_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt + v_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dB_t.$$

Abkürzend schreibt man dafür auch

$$dF(t, X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t.$$

Ist Y ein weiterer Itô-Prozess, $dY_t = \tilde{u}_t dt + \tilde{v}_t dB_t$, dann lässt sich aus der Itô-Formel die partielle Integrationsformel

$$d(X_t Y_t) = (X_t \tilde{u}_t + Y_t u_t + v_t \tilde{v}_t) dt + (X_t \tilde{v}_t + Y_t v_t) dB_t \quad (19)$$

herleiten. Abkürzend schreibt man dafür auch

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t,$$

wobei $d\langle X, Y \rangle_t = v_t \tilde{v}_t dt$. Schließlich brauchen wir für einen adaptierter Prozess von endlicher Variation v die Integrationsformel

$$d(v_t B_t) = v_t dB_t + B_t dv_t. \quad (20)$$

Falls v nicht absolut stetig ist, kann diese Formel nicht aus der Itô-Formel hergeleitet werden, sie ergibt sich allerdings direkt aus der partiellen Integrationsformel für stetige Semimartingale, siehe z.B. [Dur96, 2.10.1].

1.3.2. Itô-Diffusionen

Wir beschäftigen uns nun mit Itô-Prozessen, die in der Form $dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t$ mit deterministischen Funktionen μ und σ dargestellt werden können. Solche Prozesse bezeichnen wir als Itô-Diffusionen. In der Anwendung ist oftmals nicht der Prozess X gegeben, sondern die Koeffizienten μ und σ , und es gilt den entsprechenden Prozess X zu konstruieren. Dieser Umstand führt uns zu dem Begriff der stochastischen Differentialgleichung. Dabei handelt es sich um eine Gleichung der Form

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, & t \in [0, T] \\ X_0 = x, \end{cases} \quad (21)$$

wobei $\mu, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene messbare Funktionen seien und $x \in \mathbb{R}$. Zur Definition einer starken Lösung von Gleichung (21) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ vorgegeben, auf dem eine Brownsche Bewegung $\{B_t, t \in [0, T]\}$ definiert ist. Unter einer starken Lösung verstehen wir einen stetigen Prozess $\{X_t, t \in [0, T]\}$ auf Ω mit den Eigenschaften

(i) X ist adaptiert.

(ii) Es gilt

$$\mathbf{P} \left[\int_0^T (|\mu(s, X_s)| + \sigma^2(s, X_s)) ds < \infty \right] = 1.$$

(iii) Fast sicher gilt für alle $t \in [0, T]$

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

In folgender Proposition ist eine Situation beschrieben, in der wir die starke Lösung einer stochastischen Differentialgleichung konkret angeben können.

Proposition 1.20. *Sei $T > 0$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ und Brownscher Bewegung $\{B_t, t \in [0, T]\}$. Weiter seien*

$\beta, \gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen sowie $\sigma > 0$. Dann ist eine starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{cases} dX_t = (\gamma_t + \beta_t X_t) dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (22)$$

gegeben durch

$$X_t = \left(x + \int_0^t \frac{\gamma_s}{u_s} ds + \sigma \int_0^t \frac{1}{u_s} dB_s \right) \cdot u_t, \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

wobei

$$u_t = \exp \left(\int_0^t \beta_r dr \right), \quad t \in [0, T].$$

Außerdem gilt für jede weitere starke Lösung Y von (22)

$$\mathbf{P} [X_t = Y_t \text{ für alle } t \in [0, T]] = 1.$$

Beweisskizze. Wir folgen der Argumentation aus [Dec05, S. 108]. Die Funktion $s \mapsto \frac{1}{u_s}$, $s \in [0, T]$, ist positiv und stetig, also insbesondere beschränkt. Daher sind alle Integrale in der Lösungsformel wohldefiniert. Dass der durch (23) definierte Prozess tatsächlich eine Lösung von (22) ist, kann man direkt mit der partiellen Integrationsformel (19) nachrechnen. Zur Eindeutigkeit: Sei Y eine weitere starke Lösung von (22), dann gilt für $Z := X - Y$

$$dZ_t = \beta_t Z_t dt, \quad Z_0 = 0.$$

Mit der partiellen Integrationsformel rechnet man nach, dass daraus

$$Z_t \exp \left(- \int_0^t \beta_s ds \right) = 0 \quad \text{f.s.}$$

für alle $t \in [0, T]$ folgt. Also gilt $Z_t = 0$ f.s. für alle $t \in [0, T]$. Aus der Stetigkeit der Pfade folgt nun $\mathbf{P} [Z_t = 0 \text{ für alle } t \in [0, T]] = 1$. \square

Während starke Lösungen relativ zu einem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsraum definiert werden, wird dieser beim schwachen Lösungskonzept als Teil der Lösung aufgefasst: Unter einer schwachen Lösung von Gleichung (21) verstehen wir ein Tripel

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (X, B), \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$$

wobei

- (i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ und Brownscher Bewegung $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$,
- (ii) X ist bezüglich dieser Objekte eine starke Lösung.

1.3.3. Das Girsanov-Theorem

Wir betrachten erneut einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit einer Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ und einer Brownschen Bewegung $\{B_t, t \in [0, T]\}$. Das folgende Theorem wird uns als Kriterium dienen, um die absolute Stetigkeit der Verteilung einer Itô-Diffusion der Form $dX_t = b(t, X_t) dt + dB_t$ bezüglich des Wienermaßes festzustellen.

Theorem 1.21 (Girsanov-Theorem). *Sei $\{\varphi_s, s \in [0, T]\}$ ein progressiv messbarer Prozess mit $\int_0^T \varphi_s^2 ds < \infty$ \mathbf{P} -f.s. Für*

$$L_t = \exp \left(\int_0^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2 ds \right), \quad t \in [0, T]$$

gelte $\mathbf{E}[L_T] = 1$. Dann ist der Prozess

$$B_t - \int_0^t \varphi_s ds, \quad t \in [0, T]$$

eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_T durch $dQ_T = L_T d\mathbf{P}$ definiert ist.

Die Bedingung $\mathbf{E}[L_T] = 1$ in obiger Proposition ist gleichbedeutend damit, dass $\{L_t, t \in [0, T]\}$ ein Martingal ist. Das sieht man folgendermaßen: Mit der Itô-Formel ergibt sich für den Prozess L die Darstellung

$$L_t = 1 + \int_0^t L_s \varphi_s dB_s, \quad t \in [0, T]. \quad (24)$$

Da Itô-Integrale stetige lokale Martingale sind, existiert eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = T$ f.s., so dass $\{L_{t \wedge \tau_n}, t \in [0, T]\}$ Martingale sind für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Lemma von Fatou folgt nun für $t \in [0, T]$

$$\mathbf{E}[|L_t|] = \mathbf{E}[L_t] = \mathbf{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} L_{t \wedge \tau_n} \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[L_{t \wedge \tau_n}] = \mathbf{E}[L_0] = 1,$$

also $L_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und weiter für $s \leq t$

$$\mathbf{E}[L_t | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} L_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[L_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s] = \liminf_{n \rightarrow \infty} L_{s \wedge \tau_n} = L_s.$$

Also ist L ein Supermartingal. Da ein Supermartingal genau dann ein Martingal ist, wenn es konstanten Erwartungswert hat (siehe z.B. [LSA01, S. 228]), folgt die behauptete Äquivalenz, denn es gilt $L_0 = 1$ f.s.

Ein hinreichendes Kriterium, das diese äquivalenten Eigenschaften sicherstellt, ist die so genannte Novikov-Bedingung. Diese ist gegeben durch

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \varphi_s^2 ds \right) \right] < \infty, \quad (25)$$

siehe [Nov72]. Für unsere Zwecke stellt sich die Novikov-Bedingung als nicht geeignet heraus. Wir werden das folgende, weniger bekannte Kriterium, das wir [LSA01, S. 233] entnommen haben, verwenden.

Lemma 1.22. *Existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \left[\exp(\delta \varphi_t^2) \right] < \infty, \quad (26)$$

dann gilt $\mathbf{E} [L_T] = 1$ bzw. $\{L_t, t \in [0, T]\}$ ist ein Martingal.

Beweis. Da $x \mapsto e^x$ konvex ist, können wir mit der Jensenschen Ungleichung (siehe z.B. [Kle13, S. 152]) unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\frac{1}{T} dt$ auf $[0, T]$ die Abschätzung

$$\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \varphi_t^2 dt \right) = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{T \varphi_t^2}{2} dt \right) \leq \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left(\frac{T \varphi_t^2}{2} \right) dt$$

treffen. Falls $\frac{T}{2} \leq \delta$ gilt, folgt daraus mit dem Satz von Fubini

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \varphi_t^2 dt \right) \right] \leq \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{T \varphi_t^2}{2} \right) \right] dt \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \left[\exp(\delta \varphi_t^2) \right] < \infty,$$

d.h. in diesem Fall ist die Novikov-Bedingung erfüllt. Nun gelte $T > 2\delta$. Wir wählen eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $t_{j+1} - t_j \leq 2\delta$ für $j = 0, \dots, n-1$ und definieren

$$L_{t_j}^t := \exp \left(\int_{t_j}^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_{t_j}^t \varphi_s^2 ds \right), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Nach obiger Rechnung ist für jeden Prozess $\{L_{t_j}^t, t \in [t_j, t_{j+1}]\}$, $j = 0, \dots, n-1$, die Novikov-Bedingung erfüllt und folglich handelt es sich um Martingale. Insbesondere gilt dann

$$\mathbf{E} [L_{t_{j+1}} | \mathcal{F}_{t_j}] = \mathbf{E} [L_{t_j} L_{t_j}^{t_{j+1}} | \mathcal{F}_{t_j}] = L_{t_j} \mathbf{E} [L_{t_j}^{t_{j+1}} | \mathcal{F}_{t_j}] = L_{t_j} L_{t_j}^{t_j} = L_{t_j}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E} [L_T] = \mathbf{E} [\mathbf{E} [L_{t_n} | \mathcal{F}_{t_{n-1}}]] = \mathbf{E} [L_{t_{n-1}}] = \dots = \mathbf{E} [L_0] = 1.$$

□

Bemerkung 1.23. Obiger Beweis zeigt, dass falls wir δ in (26) so groß wählen können, dass $\delta \geq \frac{T}{2}$ gilt, die Novikov-Bedingung automatisch erfüllt ist. Jedoch lässt sich im Allgemeinen nicht sagen, welches der beiden Kriterien das stärkere ist. Wir betrachten zum Beispiel $\varphi \equiv \varphi_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Dann gilt

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \varphi_s^2 ds \right) \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{T}{2} \varphi_0^2 \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi T \sigma^2}} \int e^{x^2} \exp \left(-\frac{x^2}{T \sigma^2} \right) dx.$$

Dieser Ausdruck ist nicht endlich, falls $\sigma^2 \geq \frac{1}{T}$. In diesem Falle ist die Novikov-Bedingung also nicht erfüllt. Andererseits gilt für $t \in [0, T]$

$$\mathbf{E} [\exp(\delta\varphi_t^2)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta\sigma^2}} \int e^{x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta\sigma^2}\right) dx.$$

Dieser Ausdruck ist endlich für $\delta < \frac{1}{2\sigma^2}$ und folglich gilt (26). Umgekehrt können wir den deterministischen Prozess, definiert durch $\varphi_s = \frac{1}{(T-s)^{1/4}}$ für $s < T$ sowie $\varphi_T = 0$, betrachten. Offensichtlich ist für diesen Prozess die Novikov-Bedingung, nicht jedoch (26) erfüllt.

Anwendung: Doobsche h -Transformation für Itô-Diffusionen

Wir führen nun das Konzept der Doobschen h -Transformation für Itô-Diffusionen ein. Dieses Konzept erlaubt es unter gewissen Voraussetzungen, mit Hilfe einer Girsanov-Transformation schwache Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen zu erzeugen. Für den Spezialfall, dass die betrachtete Itô-Diffusion eine Brownsche Bewegung ist, ist die folgende Theorie in [RW00, S. 83-84] dargestellt. Die folgende Darstellung ist von [Gub16] inspiriert.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass für Gleichung (21) eine schwache Lösung $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (X, B), \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ existiert. Weiter existiere eine strikt positive Funktion $h \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, so dass

$$Z_t = h(t, X_t), \quad t \in [0, T]$$

ein Martingal mit der Eigenschaft $Z_0 = 1$ f.s. ist. Wir konstruieren nun eine schwache Lösung der Gleichung

$$dX_t = \tilde{\mu}(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad (27)$$

wobei

$$\tilde{\mu}(t, x) = \mu(t, x) + \sigma^2(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \log h(t, x).$$

Differenzieren von Z mit der Itô-Formel ergibt

$$\begin{aligned} dZ_t &= \left(\frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t) + \mu(t, X_t) \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt \\ &\quad + \sigma(t, X_t) \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dB_t. \end{aligned}$$

Da Z ein Martingal und die Semimartingal-Zerlegung eindeutig ist, verschwindet der dt -Term f.s. Diese Eigenschaft nennt man Harmonizität von h . Nun folgt

$$dZ_t = Z_t \cdot \sigma(t, X_t) \frac{\partial}{\partial x} \log h(t, X_t) dB_t.$$

Diese Darstellung entspricht (24) und folglich gilt

$$Z_t = \exp \left(\int_0^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2 ds \right), \quad t \in [0, T],$$

wobei

$$\varphi_s = \sigma(s, X_s) \frac{\partial}{\partial x} \log h(s, X_s).$$

Da Z als Martingal vorausgesetzt ist, gilt nach dem Girsanov-Theorem 1.21, dass unter $dQ_T = Z_T d\mathbf{P}$ der Prozess

$$\tilde{B}_t := B_t - \int_0^t \varphi_s ds, \quad t \in [0, T]$$

eine Brownsche Bewegung ist. Folglich hat der Prozess X unter Q_T die Semimartingal-Zerlegung

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ &= \left(\mu(t, X_t) + \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial}{\partial x} \log h(t, X_t) \right) dt + \sigma(t, X_t) d\tilde{B}_t, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Damit haben wir aus einer schwachen Lösung von Gleichung (21) eine schwache Lösung

$$(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T), (X, \tilde{B}), \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$$

von Gleichung (27) gewonnen.

2. Die α -skalierte Brownsche Brücke

In der Literatur kursieren verschiedene Definitionen und Bezeichnungen für die α -skalierte Brownsche Brücke. In größter Allgemeinheit können wir die α -skalierte Brownsche Brücke als starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{cases} dX_t = \alpha \frac{y - X_t}{T - t} dt + \sigma dB_t, & t \in [0, T) \\ X_0 = x \end{cases}$$

für gewisse Parameter $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $\alpha, \sigma, T > 0$ definieren. Im Ursprungsartikel [BS90] wird der Fall $x = y = 0$ betrachtet. Einzug in die mathematische Literatur fand der Prozess unter dem Namen α -Brownian Bridge in [Man04], wo nur der Fall $\sigma = 1, y = 0$ behandelt wird. In vorliegender Arbeit werden wir den Fall $\sigma = T = 1$ betrachten. Wir werden in Bemerkung 2.5 sehen, dass diese Festlegung im Wesentlichen keine Einschränkung darstellt. Bevor wir mit dem systematischen Studium der α -skalierten Brownschen Brücke beginnen, beschreiben wir kurz den Kontext, in dem dieser Prozess erstmals zu Modellierungszwecken eingesetzt wurde:

Ursprünglich wurde die α -skalierte Brownsche Brücke von Brennan und Schwartz [BS90] zur Modellierung der zeitlichen Entwicklung des Arbitrageprofits bei Terminkontrakten an Aktienmärkten verwendet, wobei Transaktionskosten nicht berücksichtigt werden. Mit *zeitlicher Entwicklung* ist die Entwicklung des potentiellen Arbitrageprofites bis zum Ende der Laufzeit des Terminkontraktes gemeint. Bei einem Terminkontrakt handelt es sich um ein Finanzgeschäft, bei dem man das Recht erwirbt, zu einem festen Zeitpunkt T in der Zukunft eine festgelegte Anzahl an Gütern, in diesem Falle Aktien, zu einem festgelegten Preis zu erwerben bzw. zu verkaufen. Wir betrachten ein Aktienpaket mit aktuellem Wert S , das bei einem Terminkontrakt mit Laufzeit T den Preis $F(T)$ besitzt. Wir betrachten die folgende Strategie: Wir leihen uns zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Betrag G . Dabei entspreche G dem aktuellen (d.h. abgezinsten) Wert von $F(T)$ plus dem aktuellen Wert der Dividende, die einem Besitzer des Aktienpaketes über die Laufzeit des Vertrages hinweg ausgeschüttet wird. Die Höhe der ausgeschütteten Dividende nehmen wir als fest an. Dann erwerben wir das entsprechende Aktienpaket zum aktuellen Preis S und vereinbaren mittels eines Terminkontraktes dessen Verkauf zum Zeitpunkt $t = T$. Diese Strategie führt zu einem sofortigen Profit von $\varepsilon = G - S$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und zieht für uns keine weiteren Netto-Geldflüsse nach sich. Die erhaltene Dividende sowie die durch Erfüllung des Kontraktes zum Zeitpunkt $t = T$ eingenommene Summe dienen der Tilgung der ursprünglich aufgenommenen Anleihe. Falls ε negativ ist, kann ein Profit von $-\varepsilon$ erzielt werden, indem man diese Strategie umkehrt: Zum Zeitpunkt $t = 0$ verkauft man das Aktienpaket zum Preis S , legt den aktuellen Wert von $F(T)$ an und vereinbart den erneuten Kauf des Aktienpaketes zum Zeitpunkt $t = T$. Brennan und Schwartz modellieren die zeitlich stochastische Entwicklung von ε mittels einer α -skalierten Brownschen

Brücke, d.h.

$$d\varepsilon(t) = -\alpha \frac{\varepsilon(t)}{T-t} dt + \sigma dB_t, \quad t \in [0, T),$$

wobei $\varepsilon(0) = 0$ sowie α und σ strikt positive Konstanten seien. Basierend auf diesem Modell leiten Brennan und Schwartz eine optimale Strategie zur vorzeitigen Beendigung bzw. erneuten Ausübung obiger Strategie her, und zwar unter Berücksichtigung von Transaktionskosten und der potentiellen Beschränktheit der Anzahl an Terminkontrakten, die vom Arbitrageur zu einem Zeitpunkt gehalten werden können.

2.1. Definition

Wir arbeiten auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit einer Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$ und einer Brownschen Bewegung $B = \{B_t, t \in [0, 1]\}$.

Wir beginnen mit einer vorläufigen Definition des Prozesses, der Gegenstand vorliegender Arbeit sein wird. Dieser Prozess ist über eine stochastische Differentialgleichung gegeben und a priori nur auf dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ definiert. In der endgültigen Definition (Definition 2.11) wird dieser Prozess stetig auf $[0, 1]$ fortgesetzt werden.

Definition 2.1 (vorläufig). Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$. Wir bezeichnen eine starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{cases} dX_t = \alpha \frac{y - X_t}{1-t} dt + dB_t, & t \in [0, 1) \\ X_0 = x \end{cases} \quad (28)$$

als α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y .

2.2. Darstellung als Wiener Integral und Verteilungseigenschaften

Im folgenden Abschnitt präsentieren wir die eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung (28). Der Lösungsprozess stellt sich als Gaußscher Prozess heraus und wir können aus der Lösungsdarstellung die ersten beiden Momente des Prozesses ablesen. Schließlich werden wir bemerken, dass unsere Definition der α -skalierten Brownschen Brücke im Wesentlichen den allgemeinsten Fall der in der Literatur kursierenden Definitionen der α -skalierten Brownschen Brücken darstellt.

Die folgende Lösungsformel ist (in der jeweils betrachteten Allgemeinheit) in sämtlichen Veröffentlichungen zur α -skalierten Brownschen Brücke zu finden, jedoch ohne Beweis. Diesen ergänzen wir nachfolgend.

Proposition 2.2. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$. Der Prozess $\{X_t, t \in [0, 1)\}$ definiert durch*

$$X_t = x + (1 - (1-t)^\alpha)(y-x) + (1-t)^\alpha \int_0^t \frac{dB_s}{(1-s)^\alpha} \quad (29)$$

ist die eindeutig bestimmte starke Lösung von Gleichung (28).

Beweis. Die Lösungsdarstellung und ihre Eindeutigkeit folgen direkt aus Proposition 1.20: Mit den dortigen Bezeichnungen ist $\gamma_t = \alpha y / (1 - t)$, $\beta_t = -\alpha / (1 - t)$ und $\sigma = 1$. Es gilt

$$u_s = \exp\left(\int_0^s \frac{-\alpha}{1-r} dr\right) = (1-s)^\alpha$$

und folglich ist die Lösung von (28) gegeben durch

$$\begin{aligned} X_t &= \left(x + \int_0^t \frac{\alpha y}{(1-s)^{\alpha+1}} ds + \int_0^t \frac{1}{(1-s)^\alpha} dB_s\right) \cdot (1-t)^\alpha \\ &= \left(x + y \left(\frac{1}{(1-t)^\alpha} - 1\right) + \int_0^t \frac{1}{(1-s)^\alpha} dB_s\right) \cdot (1-t)^\alpha. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck entspricht (29). □

Wir können an der Lösungsformel (29) direkt erkennen, dass die α -skalierte Brownsche Brücke eine Überlagerung, d.h. eine Summe, aus einer deterministischen, für $\alpha \neq 1$ nichtlinearen Interpolation zwischen x und y ,

$$t \mapsto x + (1 - (1-t)^\alpha)(y - x) = (1-t)^\alpha x + (1 - (1-t)^\alpha)y,$$

und eines zufälligen, von x und y unabhängigen Rauschterms,

$$t \mapsto (1-t)^\alpha \int_0^t \frac{dB_s}{(1-s)^\alpha},$$

ist.

Wir bestimmen nun die Verteilung der α -skalierten Brownschen Brücke. Die eindimensionalen Verteilungen wurden (ohne Beweis) bereits in [Man04] angegeben. Für den Fall $x = y = 0$ wird die Verteilung in [BP10a, Lemma 2.1] bestimmt. Wir präsentieren einen etwas ausführlicheren Beweis.

Korollar 2.3. *Eine α -skalierte Brownsche Brücke X ist ein Gaußscher Prozess, definiert durch die folgenden Momente:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_t] &= (1-t)^\alpha x + (1 - (1-t)^\alpha) y, \\ \mathbf{Cov}(X_s, X_t) &= (1-s)^\alpha (1-t)^\alpha \int_0^{s \wedge t} \frac{dr}{(1-r)^{2\alpha}} \end{aligned} \tag{30}$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{(1-s)(1-t)} \log(1-s), & \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{(1-s)^\alpha (1-t)^\alpha (1 - (1-s)^{1-2\alpha})}{1-2\alpha}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{für } s \leq t. \tag{31}$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{Var} [X_t] = \begin{cases} (1-t) \log \frac{1}{1-t}, & \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{(1-t)(1-(1-t)^{2\alpha-1})}{2\alpha-1}, & \alpha \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (32)$$

Beweis. Es sei $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(s) = \frac{1}{(1-s)^\alpha}$ und weiter sei

$$M_t = \int_0^t f(s) dB_s, \quad t \in [0, 1). \quad (33)$$

Da der Integrand f deterministisch und auf $[0, T]$ beschränkt ist für alle $T \in [0, 1)$, handelt es sich bei M_t um eine normalverteilte, zentrierte Zufallsvariable, vgl. Gleichung (18). Folglich ist auch

$$X_t = (1-t)^\alpha x + (1-(1-t)^\alpha) y + M_t$$

eine normalverteilte Zufallsvariable und hat den angegebenen Erwartungswert. Wegen der Linearität des stochastischen Integrals ist auch jede Linearkombination von Elementen X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , wobei $0 \leq t_1, \dots, t_n < 1$ und $n \in \mathbb{N}$, normalverteilt. Folglich ist X ein Gaußscher Prozess. Zur Berechnung der Kovarianz: Es gilt für $0 < s \leq t < 1$

$$\mathbf{Cov} (X_s, X_t) = (1-s)^\alpha (1-t)^\alpha \mathbf{Cov} \left(\int_0^s f(r) dr, \int_0^t f(r) dr \right).$$

Da f für alle $T \in (0, 1)$ Bedingung (15) erfüllt, können wir mit Formel (17)

$$\mathbf{Cov} \left(\int_0^s f(r) dr, \int_0^t f(r) dr \right) = \int_0^s f(r)^2 dr$$

schließen. Einsetzen liefert schließlich

$$\mathbf{Cov} (X_s, X_t) = (1-s)^\alpha (1-t)^\alpha \int_0^s \frac{dr}{(1-r)^{2\alpha}}.$$

□

Bemerkung 2.4. 1. Im Falle $\alpha = 1$ ergeben sich die Momente in obigem Korollar für $0 \leq s \leq t \leq 1$ zu $\mathbf{E}[X_t] = (1-t)x + ty$ und $\mathbf{Cov}(X_s, X_t) = s - st$. Wie bereits erwähnt, ist somit für $\alpha = 1$ die α -skalierte Brownsche Brücke eine Brownsche Brücke. Weiterhin ist das der einzige Fall, in dem die Funktion $t \mapsto \mathbf{E}[X_t]$ eine lineare Interpolation zwischen x und y darstellt.

2. Offensichtlich hängt die Kovarianz (31) einer α -skalierten Brownschen Brücke X nicht nur durch $t - s$ von s und t ab.

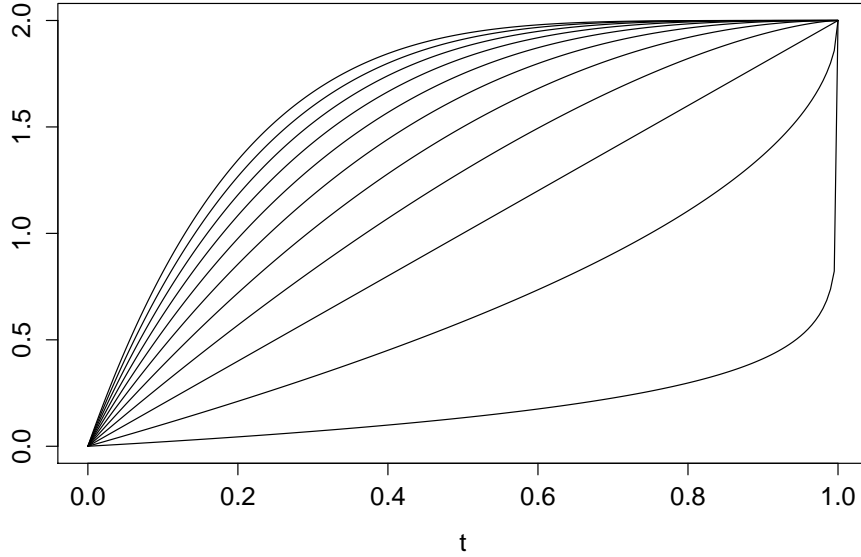


Abbildung 1: Plots der Funktionen $t \mapsto \mathbf{E}[X_t]$ für α -skalierte Brownsche Brücken zwischen 0 und 2 mit $\alpha \in \{0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0\}$. Kleinere Werte von α korrespondieren zu kleineren Erwartungswerten.

3. Offensichtlich degeneriert die Varianz der α -skalierten Brownschen Brücke für $t \nearrow 1$. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass sogar etwas Stärkeres gilt: Die Pfade konvergieren f.s. gegen den deterministischen Wert y . Auf dieses Verhalten deuten bereits die in Abbildung 2 dargestellten Simulationen hin.

Bemerkung 2.5. In Verallgemeinerung der in Definition 2.1 definierten α -skalierten Brownschen Brücke könnten wir für Konstanten $\sigma, T > 0$ auch den durch

$$\begin{cases} dX_t = \alpha \frac{y - X_t}{T - t} dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (34)$$

gegebenen Prozess auf $[0, T)$ betrachten. Für $\sigma = T = 1$ erhalten wir die ursprüngliche Definition der α -skalierten Brownschen Brücke. Wir werden nun sehen, dass der in (34) definierte Prozess aus der α -skalierten Brownschen Brücke durch eine lineare Skalierung des Raumes und der Zeit hervorgeht. Folglich können wir für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ohne Einschränkung $\sigma = T = 1$ annehmen: Sei X definiert durch Gleichung (34). Für X kann man alle bisher für die α -skalierte Brownsche Brücke durchgeführten Rechnungen völlig analog durchführen. Insbesondere erhält man die folgende geschlossene Darstellung der eindeutigen starken Lösung,

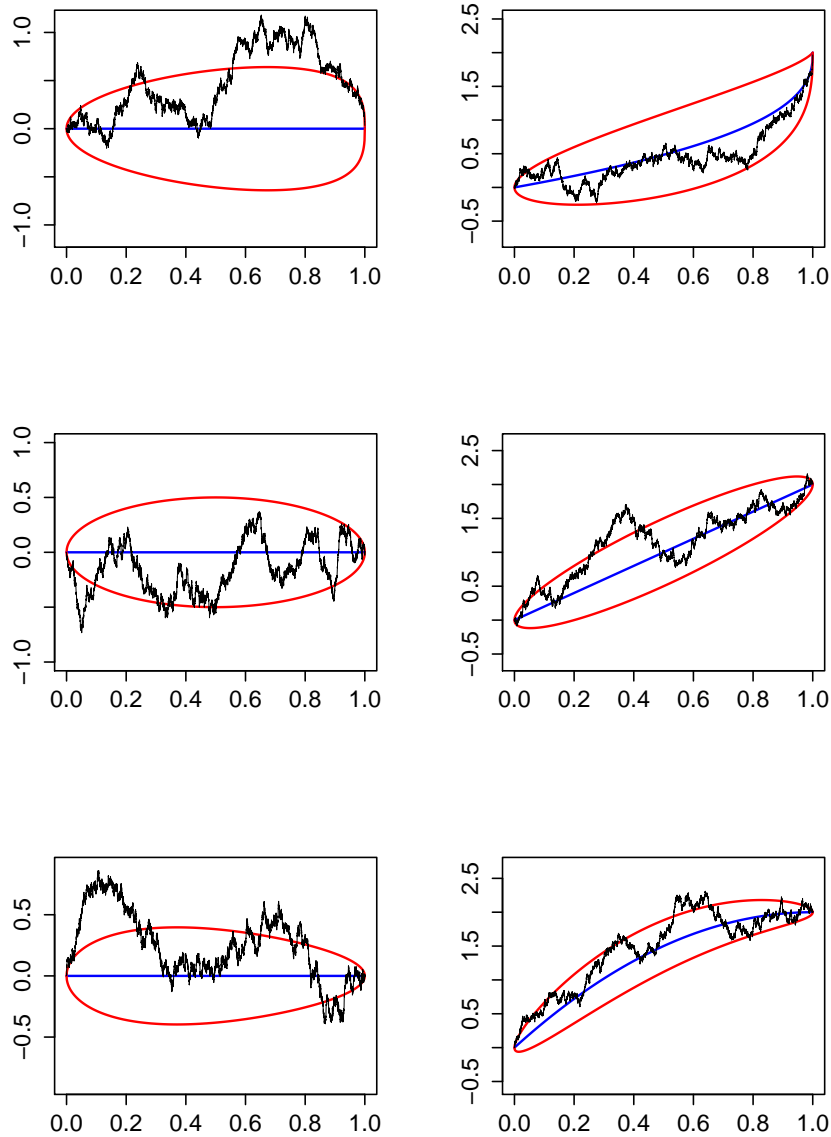


Abbildung 2: Simulationen und Darstellungen von Erwartungswert (blau) sowie Erwartungswert \pm Standardabweichung (rot) für die α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y . Links ist der Fall $x = y = 0$ dargestellt, rechts der Fall $x = 0, y = 2$. Für α wurden (oben beginnend) die Werte $(0.4, 1, 2)$ gewählt. Die Simulationen wurden mit dem Eulerverfahren erzeugt, d.h. $X_{(n+1)h} = \frac{y - X_{nh}}{1 - nh} h + \sqrt{h} Z_n$, wobei $Z_1, Z_2, \dots \sim \mathcal{N}(0, 1)$ iid. Bei diesen Simulationen wurde $h = 10^{-4}$ verwendet.

$$X_t = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha x + \left(1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha\right) y + \sigma(T-t)^\alpha \int_0^t \frac{dB_s}{(T-s)^\alpha}, \quad t \in [0, T]. \quad (35)$$

Auch dies ist ein Gaußscher Prozess. Die ersten beiden Momente sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_t] &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha x + \left(1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha\right) y, \\ &= \sqrt{T}\sigma \cdot \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha \frac{x}{\sqrt{T}\sigma} + \left(1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha\right) \frac{y}{\sqrt{T}\sigma} \right], \\ \mathbf{Cov}(X_s, X_t) &= \sigma^2(T-s)^\alpha(T-t)^\alpha \int_0^{s \wedge t} \frac{dr}{(T-r)^{2\alpha}} \\ &= T\sigma^2 \cdot \left(1 - \frac{s}{T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha \int_0^{\frac{s}{T} \wedge \frac{t}{T}} \frac{dr}{(1-r)^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Sei nun Y eine α -skalierte Brownsche Brücke zwischen \tilde{x} und \tilde{y} , wobei

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{T}\sigma}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\sqrt{T}\sigma}.$$

Dann stimmen offensichtlich die ersten beiden Momente des Prozesses

$$\tilde{Y} = \{\sqrt{T}\sigma \cdot Y_{t/T}, t \in [0, T]\}$$

mit denen von X überein. Da sowohl X als auch \tilde{Y} Gaußsche Prozesse sind, stimmen damit auch deren Verteilungen auf $(C[0, T], \mathcal{B}(C[0, T]))$ überein. Damit haben wir gezeigt, dass man durch eine lineare Skalierung von Zeit und Raum eine α -skalierte Brownsche Brücke in eine verallgemeinerte α -skalierte Brownsche Brücke transformieren kann, und umgekehrt.

2.3. Die Pfade verlaufen fast sicher von x nach y

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns mit dem Grenzwertverhalten von X_t für $t \nearrow 1$ beschäftigen, wenn X eine α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y ist. Es stellt sich heraus, dass

$$\mathbf{P} \left[\lim_{t \nearrow 1} X_t = y \right] = 1 \quad (36)$$

gilt. Dieses Resultat ist erstmals in [Man04] formuliert, bleibt dort jedoch ohne Beweis. Ein Beweis ist schließlich in [BP10a, Lemma 3.1] zu finden. Wir werden nun einen alternativen Beweis für (36) präsentieren. Unser Beweis basiert auf der in [Øks03, Aufgabe 5.11] für die Brownsche Brücke vorgeschlagenen Vorgehensweise. Anschließend stellen wir auch den Beweis aus [BP10a] vor und vergleichen schließlich die beiden Beweismethoden.

Proposition 2.6. *Sei X eine α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y . Dann gilt*

$$\lim_{t \nearrow 1} X_t = y$$

fast sicher und in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Beweis. Aus majorisierter Konvergenz folgt

$$\mathbf{Var} [X_t] = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{s \leq t\}} \left(\frac{1-t}{1-s} \right)^{2\alpha} ds \rightarrow 0 \quad \text{für } t \nearrow 1,$$

denn der Integrand konvergiert punktweise gegen 0 und ist durch $\mathbf{1}_{[0,1]}$ beschränkt. Weiter gilt

$$\mathbf{E} [X_t] = (1-t)^\alpha x + (1 - (1-t)^\alpha) y \rightarrow y \quad \text{für } t \nearrow 1$$

und folglich

$$\mathbf{E} [(X_t - y)^2] = \mathbf{Var} [X_t] + \mathbf{E} [X_t - y]^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } t \nearrow 1.$$

Das ist die behauptete L^2 -Konvergenz.

Zur fast sicheren Konvergenz: Wir gehen von Darstellung (29) der Lösung aus. Wir müssen zeigen, dass der Prozess $\{(1-t)^\alpha M_t, t \in [0, 1)\}$, wobei $M = \int_0^\cdot f(s) dB_s$ und $f(s) = \frac{1}{(1-s)^\alpha}$ für $s \in [0, 1)$, fast sicher für $t \nearrow 1$ gegen 0 konvergiert. Da f für alle $T \in (0, 1)$ auf $[0, T]$ beschränkt ist, erfüllt f Voraussetzung (15) und folglich ist $\{M_t, t \in [0, 1)\}$ ein Martingal. Wir werden nun die fast sichere Konvergenz mit Hilfe der Maximalungleichung (7) beweisen. Es gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left[\sup\{(1-t)^\alpha |M_t|, t \in [(1-2^{-n}), (1-2^{-(n-1)})]\} \geq \varepsilon \right] \\ & \leq \mathbf{P} \left[\sup\{(2^{-n})^\alpha |M_t|, t \in [(1-2^{-n}), (1-2^{-(n+1)})]\} \geq \varepsilon \right] \\ & \leq \mathbf{P} \left[\sup\{|M_t|, t \in [0, (1-2^{-(n+1)})]\} \geq 2^{n\alpha} \varepsilon \right] \\ & \leq \frac{1}{4^{n\alpha} \varepsilon^2} \mathbf{E} \left[\left(\int_0^{1-2^{-(n+1)}} \frac{dB_s}{(1-s)^\alpha} \right)^2 \right] \\ & = \frac{1}{4^{n\alpha} \varepsilon^2} \int_0^{1-2^{-(n+1)}} \frac{ds}{(1-s)^{2\alpha}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Dabei folgen der vorletzte Schritt aus der Doob'schen Maximalungleichung (7) und der letzte Schritt aus der Itô-Isometrie (16). Das auftretende Lebesgue-Integral ist in Gleichung (31) ausgerechnet. Wir setzen nun $\gamma = \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4})$ und wählen $\varepsilon = 2^{-n\gamma}$. Im Falle $\alpha \neq \frac{1}{2}$ lautet obiger Ausdruck dann

$$\frac{1}{4^{\alpha n} 2^{-2n\gamma}} \frac{1}{1-2\alpha} (1 - 2^{-(n+1)(1-2\alpha)}) = C_1 2^{-2(\alpha-\gamma)n} - C_2 2^{-(1-2\gamma)n}$$

wobei

$$C_1 = \frac{1}{1 - 2\alpha}, \quad C_2 = \frac{2^{2\alpha-1}}{1 - 2\alpha}.$$

Da sowohl $2(\alpha - \gamma)$ als auch $1 - 2\gamma$ strikt positiv sind, ist dieser Ausdruck summierbar in $n \in \mathbb{N}$. Im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ errechnet sich Ausdruck (37) zu

$$-\frac{1}{4^{n/2}2^{-2n\gamma}} \log(2^{-(n+1)}) = \log 2 \cdot (n+1)2^{-(1-2\gamma)n}$$

Auch dies ist summierbar in $n \in \mathbb{N}$, da für alle $\delta > 0$ die Relation $n < 2^{\delta n}$ für n groß genug gilt. Mit dem Borel-Cantelli Lemma (Proposition 1.1) folgt nun

$$\mathbf{P} \left[\text{für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } t \in [(1 - 2^{-n}), (1 - 2^{-n-1})], \right. \\ \left. \text{so dass } (1 - t)^\alpha |M_t| \geq 2^{-\gamma n} \right] = 1.$$

Da $(2^{-\gamma n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt f.s. $(1 - t)^\alpha M_t \rightarrow 0$ für $t \nearrow 1$. \square

Bemerkung 2.7. Alternativ folgt die L^2 -Konvergenz in obiger Proposition bereits aus der fast sicheren Konvergenz in Verbindung mit Proposition 1.6.

Wir präsentieren nun den in [BP10a] geführten Beweis für (36). Dieser Beweis beruht auf einem starken Gesetz großer Zahlen für lokale Martingale. Vorbereitend benötigen wir das folgende klassische Resultat, das einen Zusammenhang zwischen der Beschränktheit des quadratischen Variationsprozesses und dem Grenzwertverhalten der Pfade für $t \nearrow T$ eines lokalen Martingals auf $[0, T)$ darstellt.

Proposition 2.8. *Sei $T \in (0, \infty]$ und $M = \{M_t, t \in [0, T)\}$ ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ f.s. Dann existiert für \mathbf{P} -fast alle $\omega \in \{\lim_{t \nearrow T} \langle M \rangle_t < \infty\}$ der Grenzwert $\lim_{t \nearrow T} M_t(\omega)$ in \mathbb{R} .*

Beweis. Für einen Beweis im Falle $T = \infty$ siehe zum Beispiel [CW90, S. 191]. Für $T < \infty$ lässt sich der Beweis ganz analog führen. \square

Folgende Proposition stammt aus [Lé78].

Proposition 2.9 (Gesetz großer Zahlen für lokale Martingale). *Sei $T \in (0, \infty]$ und $M = \{M_t, t \in [0, T)\}$ ein stetiges lokales Martingal. Für M gelte $M_0 = 0$ und $\lim_{t \nearrow T} \langle M \rangle_t = \infty$ f.s. Weiterhin sei $f : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion, die*

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)^2} dx < \infty$$

erfüllt. Dann gilt

$$\lim_{t \nearrow T} \frac{M_t}{f(\langle M \rangle_t)} = 0 \quad \text{f.s.}$$

Beweis. Für den Beweis braucht man Integrationstheorie bzgl. stetiger lokaler Martingale, die wir in vorliegender Arbeit nicht als bekannt voraussetzen. Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass M die Form

$$M_t = \int_0^t X_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

für einen stetigen und adaptierten Prozess X hat. Weiter nehmen wir vereinfachend an, dass f stetig differenzierbar ist. Wir werden die Proposition auch nur unter diesen Voraussetzungen verwenden. Der vollständige Beweis benutzt - im allgemeineren Rahmen - die gleiche Argumentation wie die hier angeführte. Wir folgen der Argumentation in [Lé78]: Durch Fortsetzung können wir o.E. annehmen, dass f eine Funktion $[0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ist, die monoton wachsend und stetig differenzierbar ist sowie die Bedingung $\int_0^\infty \frac{1}{f(x)^2} dx < \infty$ erfüllt. Nach Formel (14) gilt

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds, \quad t \in [0, T].$$

Wir definieren das lokale Martingal

$$Z_t := \int_0^t \frac{1}{f(\langle M \rangle_s)} dM_s = \int_0^t \frac{X_s}{f(\langle M \rangle_s)} dB_s, \quad t \in [0, T].$$

Dann gilt mit der Substitution $h = \int_0^s X_r^2 dr$

$$\lim_{t \nearrow T} \langle Z \rangle_t = \int_0^T \frac{X_s^2}{f^2(\langle M \rangle_s)} ds = \int_0^T \frac{X_s^2}{f^2(\int_0^s X_r^2 dr)} ds = \int_0^{\tilde{T}} \frac{1}{f^2(h)} dh \leq \int_0^\infty \frac{1}{f^2(h)} dh < \infty,$$

wobei $\tilde{T} := \int_0^T X_r^2 dr \in [0, \infty]$. Nach Proposition 2.8 folgt daraus, dass der Grenzwert $\lim_{t \nearrow T} Z_t$ fast sicher in \mathbb{R} existiert. Wir definieren nun

$$b_t = f(\langle M \rangle_t), \quad t \in [0, T].$$

Der Prozess b ist absolut stetig und monoton wachsend, denn f und $\langle M \rangle$ haben diese Eigenschaften. Weiter folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ aus der Integrabilitätsbedingung an f . Folglich gilt auch $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = \infty$ f.s. Mit der partiellen Integrationsformel (19) und $Z_0 = 0$ erhalten wir

$$M_t = \int_0^t \frac{b_s}{b_t} dM_s = \int_0^t b_s dZ_s = - \int_0^t Z_s db_s + Z_t b_t = \int_0^t (Z_t - Z_s) db_s + Z_t b_0.$$

Also gilt für $0 \leq u \leq t < T$

$$\begin{aligned} \left| \frac{M_t}{b_t} \right| &\leq \frac{1}{b_t} \left| \int_0^u (Z_t - Z_s) db_s \right| + \frac{b_t - b_u}{b_t} \sup_{u \leq s \leq t} |Z_t - Z_s| + \left| \frac{Z_t}{b_t} \right| b_0 \\ &\leq \left| \frac{Z_t}{b_t} \right| b_u + \frac{1}{b_t} \left| \int_0^u Z_s db_s \right| + \frac{b_t - b_u}{b_t} \sup_{u \leq s \leq t} |Z_t - Z_s|. \end{aligned}$$

Da $\frac{b_t - b_u}{b_t} \in [0, 1]$ und Z f.s. in \mathbb{R} konvergiert, können wir u so groß wählen, dass der Summand ganz rechts gleichmäßig in $t \geq u$ beliebig klein ist. Da außerdem f.s. $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = \infty$ gilt, können wir anschließend t so groß wählen, dass die ersten beiden Summanden beliebig klein sind. Folglich gilt

$$\lim_{t \nearrow T} \frac{M_t}{f(\langle M \rangle_t)} = \lim_{t \nearrow T} \frac{M_t}{b_t} = 0.$$

□

Zur Illustration dieser Proposition fügen wir ein Beispiel an.

Beispiel 2.10. Wir wählen in obiger Proposition $T = \infty$ und $M = B$ für eine Brownsche Bewegung B . Da

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2\gamma}} dx < \infty$$

für alle $\gamma > \frac{1}{2}$, können wir f durch $f(x) = x^\gamma$ definieren. Damit erhalten wir für $\gamma > \frac{1}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t^\gamma} = 0 \quad \text{f.s.}$$

Insbesondere ergibt sich für $\gamma = 1$ das starke Gesetz großer Zahlen für die Brownsche Bewegung.

2. *Beweis für (36).* Wie schon im ersten Beweis müssen wir

$$\mathbf{P} \left[\lim_{t \nearrow 1} (1-t)^\alpha M_t = 0 \right] = 1$$

zeigen, wobei M wie in (33) definiert ist. Da wir für verschiedene Werte von α verschiedene Rechnungen durchführen müssen, schreiben wir nun $M^{(\alpha)}$ für M . Zunächst berechnen wir mittels Formel (14) den quadratischen Variationsprozess von $M^{(\alpha)}$,

$$\begin{aligned} \langle M^{(\alpha)} \rangle_t &= \int_0^t \frac{ds}{(1-s)^{2\alpha}} \\ &= \begin{cases} \log \frac{1}{1-t}, & \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{1 - (1-t)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}, & \alpha \neq \frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei das Integral bereits in Gleichung (32) ausgerechnet wurde. Aus dieser Darstellung kann man ablesen, dass

$$\lim_{t \nearrow 1} \langle M^{(\alpha)} \rangle_t = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-2\alpha}, & \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

gilt. Im Folgenden betrachten wir die drei Fälle $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha < \frac{1}{2}$ separat.

- Sei $\alpha > \frac{1}{2}$. Wir definieren die Funktion $f_\alpha : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ durch

$$f(x) = x^{\alpha/(2\alpha-1)}.$$

Diese Funktion ist monoton wachsend und es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{f_\alpha(x)^2} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2\alpha/(2\alpha-1)}} dx < \infty,$$

da $\frac{2\alpha}{2\alpha-1} > 1$. Mit Proposition 2.9 können wir nun

$$\lim_{t \nearrow T} \frac{M_t^{(\alpha)}}{f_\alpha(\langle M^{(\alpha)} \rangle_t)} = 0 \quad \text{f.s.}$$

schließen. Sei $t > 0$, dann gilt auf der Menge $\{\langle M^{(\alpha)} \rangle_t \geq 1\}$

$$(1-t)^\alpha M_t^{(\alpha)} = (1-t)^\alpha f_\alpha(\langle M^{(\alpha)} \rangle_t) \cdot \frac{M_t^{(\alpha)}}{f_\alpha(\langle M^{(\alpha)} \rangle_t)}.$$

Der erste Faktor dieses Ausdrucks lässt sich durch

$$0 \leq (1-t)^\alpha f_\alpha(\langle M^{(\alpha)} \rangle_t) \leq (1-t)^\alpha f_\alpha\left(\frac{1}{2\alpha-1} \frac{1}{(1-t)^{2\alpha-1}}\right) = (1-t)^\alpha C_\alpha \frac{1}{(1-t)^\alpha} = C_\alpha$$

mit $C_\alpha = (2\alpha-1)^{\alpha/(1-2\alpha)}$ abschätzen. Mit $\{\langle M^{(\alpha)} \rangle_t \geq 1\} \uparrow \Omega$ folgt nun $(1-t)^\alpha M_t^{(\alpha)} \rightarrow 0$ für $t \nearrow 1$.

- Sei $\alpha = \frac{1}{2}$. Wir definieren $f_{1/2} : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ durch

$$f_{1/2}(x) = e^{x/2}.$$

Diese Funktion ist monoton wachsend und

$$\frac{1}{f_{1/2}(x)^2} = e^{-x}$$

ist integrierbar über $[1, \infty)$. Wir können also genau wie im ersten Fall vorgehen und müssen nur noch zeigen, dass $\sqrt{1-t} f_{1/2}(\langle M^{(1/2)} \rangle_t)$ beschränkt ist für $t \nearrow 1$. Das ist der Fall, denn

$$\sqrt{1-t} f_{1/2}(\langle M^{(1/2)} \rangle_t) = \sqrt{1-t} \exp\left(\frac{-\log(1-t)}{2}\right) = 1.$$

- Schließlich sei $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. In diesem Falle ist der quadratische Variationsprozess von $M^{(\alpha)}$ beschränkt auf $[0, 1)$. Aus Proposition 2.8 erhalten wir, dass der Grenzwert $\lim_{t \nearrow 1} M_t^{(\alpha)}$ fast sicher in \mathbb{R} existiert. Daraus folgt mit $\lim_{t \nearrow 1} (1-t)^\alpha = 0$ die fast sichere Konvergenz $(1-t)^\alpha M_t^{(\alpha)} \rightarrow 0$ für $t \nearrow 1$.

□

Wir wollen nun die beiden vorgestellten Beweise miteinander vergleichen. In beiden Beweisen wird gezeigt, dass

$$\lim_{t \nearrow T} (1-t)^\alpha M_t^{(\alpha)} = 0 \quad \text{f.s.}$$

gilt. Um diese Aussage zu zeigen, verwenden beide Methoden fundamental die Tatsache, dass

$$M_t^{(\alpha)} = \int_0^t \frac{dB_s}{(1-s)^\alpha}, \quad t \in [0, 1)$$

ein Martingal ist. Im ersten Fall ermöglicht das die Verwendung einer Martingalungleichung, im zweiten Fall die Verwendung von Resultaten, die einen Zusammenhang zwischen dem Verhalten von $\langle M^{(\alpha)} \rangle_t$ und von $M_t^{(\alpha)}$ für $t \nearrow 1$ herstellen. Die erste Beweismethode ist recht elementar und anschaulich: Mit dem Borel-Cantelli Lemma wird gezeigt, dass f.s. $(1-\cdot)M^{(\alpha)}$ schließlich durch eine gegen null konvergierende Stufenfunktion dominiert ist. Der Beweis ist insbesondere dadurch einfach, dass für alle Werte von α das gleiche Vorgehen zum Ziel führt. Der zweite Beweis verwendet tiefer liegende Resultate aus der Theorie lokaler Martingale und ist dadurch vermutlich weniger anschaulich. Außerdem sind für die beiden Fälle $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ und $\alpha \geq \frac{1}{2}$ verschiedene Vorgehensweisen nötig. Das hat jedoch auch den Vorteil, dass ein gewisser struktureller Unterschied zwischen diesen beiden Fällen aufgedeckt wird: Im Falle $\alpha \geq \frac{1}{2}$ zeigt das Martingal $M^{(\alpha)}$ ein „chaotisches“ Verhalten für $t \nearrow 1$: Wegen der Itô-Isometrie gilt

$$\mathbf{Var} \left[M_t^{(\alpha)} \right] = \int_0^t \frac{ds}{(1-s)^{2\alpha}} = \langle M^{(\alpha)} \rangle_t,$$

also $\mathbf{Var} \left[M_t^{(\alpha)} \right] \rightarrow \infty$ für $t \nearrow 1$. Die Tatsache, dass sich die α -skalierte Brownsche Brücke stetig auf $[0, 1]$ fortsetzen lässt, wird erst durch die gegen 0 konvergierende deterministische Funktion $t \mapsto (1-t)^\alpha$ erreicht. Im Falle $\alpha < \frac{1}{2}$ verhält sich hingegen schon der stochastische Anteil, d.h. das Martingal $M^{(\alpha)}$, regulär auf $[0, 1]$.

Nachdem wir uns nun überzeugt haben, dass die α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y tatsächlich f.s. für $t \nearrow 1$ gegen y konvergiert, können wir diese stetig auf $[0, 1]$ fortsetzen:

Definition 2.11. Seien $\alpha > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen den Prozess $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ definiert durch

$$X_t = \begin{cases} x + (1 - (1-t)^\alpha)(y-x) + (1-t)^\alpha \int_0^t \frac{dB_s}{(1-s)^\alpha}, & t < 1 \\ y & t = 1 \end{cases}$$

als α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y . Nach Proposition 2.6 ist der Prozess X fast sicher stetig auf $[0, 1]$ und wir bezeichnen seine Verteilung auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ mit $P_\alpha^{x,y}$.

2.4. Äquivalenz zum Wienermaß und Girsanov-Dichte

Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Äquivalenz von $P_\alpha^{x,y}$ zum Wienermaß bzw. der Äquivalenz von $P_\alpha^{x,y}$ und $P_\beta^{x,y}$ für $\alpha \neq \beta$. Wir arbeiten auf dem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(C[0, 1], \mathcal{F}, \mathbf{W}^x)$ versehen mit der Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$, wie beschrieben in Abschnitt 1.2.4.

Proposition 2.12. *Für alle $t \in (0, 1)$ sind die Einschränkungen der Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbf{W}^x und $P_\alpha^{x,y}$ auf \mathcal{F}_t äquivalent und es gilt*

$$dP_\alpha^{x,y}|_{\mathcal{F}_t} = L_{\alpha,t}^{x,y} \cdot d\mathbf{W}^x|_{\mathcal{F}_t}, \quad (38)$$

wobei

$$L_{\alpha,t}^{x,y} := \exp \left(\alpha \int_0^t \frac{y - X_s}{1 - s} dX_s - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} ds \right).$$

Obiges Resultat ist erstmalig in [Man04] formuliert, jedoch ohne Beweis. Barczy und Pap verweisen zwecks Beweis auf ein sehr allgemeines Resultat [LSA01, Theorem 7.20]. Wir werden nun einen möglichst elementaren, der Situation angepassten, Beweis angeben.

Beweis von Proposition 2.12. Aus Gleichung (28) kann man ablesen, dass wenn $X \sim P_\alpha^{x,y}$, dann ist $X - x \sim P_\alpha^{0,y-x}$. Also genügt es, den Fall $x = 0$ zu behandeln. Die Aussage der Proposition folgt aus dem Girsanov-Theorem: Falls $L_{\alpha,t}^{0,y}$ unter \mathbf{W} den Erwartungswert 1 hat, so folgt mit Theorem 1.21, dass unter $L_{\alpha,t}^{0,y} \cdot d\mathbf{W}$

$$X_t - \alpha \int_0^t \frac{y - X_s}{1 - s} ds$$

eine Brownsche Bewegung ist und folglich $\{X_s, s \in [0, t]\}$ der definierenden Differentialgleichung (28) der α -skalierten Brownschen Brücke genügt. Den Nachweis, dass $E_{\mathbf{W}}(L_{\alpha,t}^{0,y}) = 1$ gilt, führen wir mit Hilfe von Lemma 1.22. Wir müssen die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$\sup_{0 \leq s \leq t} E_{\mathbf{W}} \left[\exp \left(\delta \alpha^2 \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} \right) \right] < \infty \quad (39)$$

nachweisen. Wir nutzen die Ungleichung $2a^2 + 2b^2 \geq (a - b)^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ sowie die Tatsache, dass die Funktion $s \mapsto 1/(1 - s)^2$ auf $[0, 1)$ monoton wächst, um folgendermaßen abzuschätzen:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{W}} \left[\exp \left(\delta \alpha^2 \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} \right) \right] &\leq E_{\mathbf{W}} \left[\exp \left(\delta \alpha^2 \frac{(y - X_s)^2}{(1 - t)^2} \right) \right] \\ &\leq E_{\mathbf{W}} \left[\exp \left(\delta \alpha^2 \frac{2X_s^2}{(1 - t)^2} \right) \right] \exp \left(\delta \alpha^2 \frac{2y^2}{(1 - t)^2} \right) \\ &\leq E_{\mathbf{W}} \left[\exp(\delta c_1 X_s^2) \right] \exp(\delta c_2) \end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Unter \mathbf{W} ist die Zufallsvariable X_s/\sqrt{s} standardnormalverteilt und folglich gilt für den Erwartungswert in obigem Ausdruck

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{W}} [\exp(\delta c_1 X_s^2)] &= E_{\mathbf{W}} [\exp(\delta c_1 s X_1^2)] \\ &\leq E_{\mathbf{W}} [\exp(\delta c_1 t X_1^2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\delta c_1 t z^2) \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz. \end{aligned}$$

Diese Schranke ist unabhängig von $s \in [0, t]$ und endlich für $\delta < \frac{1}{2c_1 t}$. Damit ist (39) gezeigt. Die behauptete Äquivalenz der Wahrscheinlichkeitsmaße folgt, da $L_{\alpha, t}^{0, y}$ strikt positiv ist. \square

Mit dem folgenden Lemma erhalten wir eine alternative, besonders handliche Darstellung für die Girsanov-Dichte. Auch diese Darstellung wird in [Man04] angegeben.

Lemma 2.13. *Für die Girsanov-Dichte $L_{\alpha, t}^{x, y}$ aus Proposition 2.12 gilt*

$$L_{\alpha, t}^{x, y} = \frac{1}{(1-t)^{\alpha/2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \left[\frac{(y - X_t)^2}{1-t} - (y-x)^2 \right] - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \int_0^t \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds\right). \quad (40)$$

Beweis. Wir definieren \tilde{X} durch $\tilde{X}_t = X_t - y$ für $t \in [0, 1)$. Dann gilt $d\tilde{X}_t = dX_t$ und somit

$$L_{\alpha, t}^{x, y} = \exp\left(-\alpha \int_0^t \frac{\tilde{X}_s}{1-s} d\tilde{X}_s - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \frac{\tilde{X}_s^2}{(1-s)^2} ds\right). \quad (41)$$

Die folgende Rechnung ist auch in [Gö14] zu finden. Für die Prozesse \tilde{X}^2 und $Y_t = \frac{1}{1-t}$, $t \in [0, 1)$, erhalten wir mit der Itô-Formel

$$d\tilde{X}_t^2 = 2\tilde{X}_t d\tilde{X}_t + dt, \quad dY_t = \frac{1}{(1-t)^2} dt.$$

Mittels der partiellen Integrationsformel (19) folgt daraus

$$d\left(\frac{\tilde{X}_t^2}{1-t}\right) = d(\tilde{X}_t Y_t) = 2\frac{\tilde{X}_t}{1-t} d\tilde{X}_t + \frac{\tilde{X}_t^2}{(1-t)^2} dt + \frac{1}{1-t} dt,$$

oder äquivalent

$$\int_0^t \frac{\tilde{X}_s}{(1-s)} d\tilde{X}_s = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\tilde{X}_t^2}{1-t} - (x-y)^2 \right] - \int_0^t \frac{\tilde{X}_s^2}{(1-s)^2} ds + \log(1-t) \right). \quad (42)$$

Einsetzen in (41) ergibt schließlich (40). \square

Bemerkung 2.14. Die Tatsache $\tilde{X} \sim \mathbf{W}^{x-y}$ ist für obige Rechnung unerheblich. Tatsächlich gilt Formel (42) auch, wenn \tilde{X} ein beliebiger Itô-Prozess ist.

Der besondere Vorteil von Darstellung (40) ist, dass sie kein stochastisches Integral mehr enthält. So ist es in dieser Darstellung zum Beispiel möglich, direkt das Verhalten von $L_{\alpha,t}^{x,y}$ für $t \nearrow 1$ zu analysieren. Zunächst eine heuristische Überlegung: Es gilt $P_{\alpha}^{x,y}(X_1 = y) = 1$ und die rückstellende Kraft, die dieses Verhalten bewirkt, ist umso stärker, je größer α ist. Also ist zu erwarten, dass für $t \nearrow 1$ die Girsanov-Dichte auf der Menge $\{X_1 \neq y\}$ verschwindet, und zwar umso schneller, je größer α und $|X_1 - y|$ sind. Das folgende Lemma bestätigt diese Intuition.

Lemma 2.15. *Wir definieren*

$$l_{\alpha}^{x,y}(t) := \log L_{\alpha,t}^{x,y} = -\frac{\alpha}{2} \left(\log(1-t) + \left[\frac{(y-X_t)^2}{1-t} - (y-x)^2 \right] + (\alpha-1) \int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right).$$

Dann gilt

$$-\lim_{t \nearrow 1} (1-t) l_{\alpha}^{x,y}(t) = \frac{\alpha^2 (y-X_1)^2}{2}.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto (y-X_t(\omega))^2$, existiert für alle $\omega \in C[0,1]$ ein $\tau(\omega) < 1$, s.d. $|(y-X_t(\omega))^2 - (y-X_1(\omega))^2| < \varepsilon$ für alle $t > \tau(\omega)$. Also gilt

$$\begin{aligned} (1-t) \int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds &= (1-t) \left[\int_0^{\tau} \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds + \int_{\tau}^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right] \\ &\leq (1-t) \left[\int_0^{\tau} \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds + ((y-X_1)^2 + \varepsilon) \int_{\tau}^t \frac{ds}{(1-s)^2} \right] \\ &\leq (1-t) \left[\int_0^{\tau} \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds + ((y-X_1)^2 + \varepsilon) \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-\tau} \right) \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\limsup_{t \nearrow 1} (1-t) \int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds \leq (y-X_1)^2.$$

Genauso erhält man

$$\liminf_{t \nearrow 1} (1-t) \int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds \geq (y-X_1)^2.$$

Weiter gilt

$$\lim_{t \nearrow 1} (1-t) \log(1-t) = -\lim_{t \nearrow 1} \frac{\log \frac{1}{1-t}}{\frac{1}{1-t}} = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{r} = 0.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{t \nearrow 1} (1-t) l_{\alpha}^{x,y}(t) = -\frac{\alpha}{2} \left((y-X_1)^2 + (\alpha-1)(y-X_1)^2 \right) = -\frac{\alpha^2 (y-X_1)^2}{2}.$$

□

Als Korollar von Proposition 2.12 erhalten wir für alle $\alpha, \beta > 0$ und alle $t \in (0, 1)$ die Äquivalenz von $P_\alpha^{x,y}$ und $P_\beta^{x,y}$ auf \mathcal{F}_t . Es gilt nämlich

$$dP_\alpha^{x,y}|_{\mathcal{F}_t} = L_{\alpha,t}^{x,y} \cdot d\mathbf{W}^x|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_{\alpha,t}^{x,y}}{L_{\beta,t}^{x,y}} L_{\beta,t}^{x,y} \cdot d\mathbf{W}^x|_{\mathcal{F}_t} = \frac{L_{\alpha,t}^{x,y}}{L_{\beta,t}^{x,y}} \cdot dP_\beta^{x,y}|_{\mathcal{F}_t}.$$

Unter Verwendung von Darstellung (40) für die Girsanov-Dichten erhalten wir:

Korollar 2.16. *Für alle $\alpha, \beta > 0$ und alle $t \in (0, 1)$ sind $P_\alpha^{x,y}$ und $P_\beta^{x,y}$ auf \mathcal{F}_t äquivalent und es gilt*

$$dP_\alpha^{x,y}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{1}{(1-t)^{(\alpha-\beta)/2}} \exp \left(-\frac{\alpha-\beta}{2} \left[\frac{(y-X_t)^2}{1-t} - (y-x)^2 + (\alpha+\beta-1) \int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right] \right) \cdot dP_\beta^{x,y}|_{\mathcal{F}_t}.$$

Insbesondere erhalten wir für $\beta = 1$ die Äquivalenz von $P_\alpha^{x,y}$ zur Verteilung der Brown-schen Brücke, $\mathbf{W}^{x,y} := P_1^{x,y}$.

Bemerkung 2.17. 1. Obiges Korollar ergibt sich im Falle $x = y = 0$ auch aus dem Beweis von Lemma 3 in [BP10b].

2. Für $\alpha \neq \beta$ überträgt sich die eben bewiesene Äquivalenz von $P_\alpha^{x,y}$ und $P_\beta^{x,y}$ auf \mathcal{F}_t für alle $t \in (0, 1)$ nicht auf die Äquivalenz der beiden Maße auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$. Barczy und Pap zeigen in [BP10a], dass für $\alpha \neq \beta$ die Maße $P_\alpha^{0,0}$ und $P_\beta^{0,0}$ sogar singularär auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ sind.

3. Ist die α -skalierte Brownsche Brücke wirklich eine Brücke?

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, ob die α -skalierte Brownsche Brücke als Brücke eines Markovprozesses aufgefasst werden kann. Da in der Literatur eine einheitliche Definition von Brückenprozessen schwer zu finden ist, legen wir zunächst fest, was genau wir in vorliegender Arbeit unter der Brücke eines Markovprozesses verstehen wollen. Wir werden Markovbrücken als eine bestimmte reguläre Version der bedingten Verteilung eines Markovprozesses definieren, wobei die Bedingung durch den Wert des Prozesses zum Zeitpunkt $t = 1$ gegeben ist. Dieser Definition ist der Abschnitt 3.1 gewidmet. In diesem wird außerdem ein Kriterium präsentiert, mit dem man überprüfen kann, ob es sich bei einer gegebenen Familie von Prozessen um die Brücken eines Markovprozesses handelt, sofern dieser zu einer gewissen Klasse von Itô-Diffusionen gehört. Bekanntermaßen kann man die Verteilungen der Brownschen Brücken zwischen x und y als eine auf ihren Wert zum Zeitpunkt $t = 1$ bedingte Brownsche Bewegung auffassen, d.h. $\{\mathbf{W}^{x,y}, y \in \mathbb{R}\}$ ist eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $\{\mathbf{W}^x(\cdot | X_1 = y), y \in \mathbb{R}\}$. Dabei sei darauf hingewiesen, dass $\mathbf{W}^{x,y}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert ist, nicht nur $\mathbf{W}^x \circ X_1^{-1}$ -fast sicher. In Abschnitt 3.2 werden wir zunächst daran erinnern, dass es sich bei $\{\mathbf{W}^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ auch im Sinne unserer Definition um eine Familie von $\{\mathbf{W}^x, x \in \mathbb{R}\}$ -Brücken handelt. Ausgehend von dieser Beobachtung werden wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es sich auch für $\alpha \neq 1$ bei $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ um die Brücken eines Markovprozesses handelt. Dazu betrachten wir das folgende Resultat aus [Man04]: *Die α -skalierte Brownsche Brücke ist nicht Brücke eines zentrierten Gauß-Markov-Prozesses.* Wir werden sehen, dass der von Mansuy geführte Beweis dieser Aussage nicht vollständig ist. Basierend auf bereits existierenden Resultaten zur Kovarianzstruktur Gaußscher Prozesse, wird uns ein vollständiger Beweis der Aussage von Mansuy gelingen. Abschließend werden wir in Abschnitt 3.3 die Aussage von Mansuy verallgemeinern: Wir zeigen, dass $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ auch nicht die Familie von Brücken einer Itô-Diffusion (mit gewissen Regularitätsvoraussetzungen) ist.

3.1. Markovbrücken

Wir betrachten den messbaren Raum $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ ausgestattet mit der kanonischen Filtration $\{\mathcal{F}_t^0, t \in [0, 1]\}$. $X = \{X_t, t \in [0, 1]\}$ sei der Koordinatenprozess.

Definition 3.1. Unter einem Markovmaß mit strikt positiven Übergangsdichten verstehen wir eine Familie $Q = \{Q^x, x \in \mathbb{R}\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $Q^x(X_0 = x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist Prozess X unter Q^x ein Markovprozess mit strikt positiver, von x unabhängiger Übergangsdichte

$$p(s, w; t, z), \quad w, z \in \mathbb{R}, 0 \leq s < t \leq 1,$$

bezüglich eines σ -endlichen Maßes m auf \mathbb{R} .

Sei nun Q wie in obiger Definition. Bevor wir definieren, was wir in vorliegender Arbeit unter Markovbrücken bzgl. Q verstehen wollen, folgen einige motivierende Bemerkungen:

Wir bemerken zunächst, dass für beliebiges $A \in \mathcal{B}(C[0,1])$ die Abbildung $x \mapsto Q^x(A)$, $x \in \mathbb{R}$, messbar ist. Das zeigt man genau wie im Beweis von Proposition 3.3. Sei nun ν_0 eine beliebige Verteilung auf \mathbb{R} . Dann können wir mittels Q durch

$$Q^{\nu_0}(\cdot) = \int Q^x(\cdot) \nu_0(dx)$$

eine Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$ definieren, unter dem X ein Markovprozess mit Anfangsverteilung ν_0 und Übergangsdichte p ist. Für Q^{ν_0} haben wir dann per Definition eine reguläre Desintegration bzgl. X_0 . Nun ist es von Interesse, in einem zweiten Schritt auch eine reguläre Desintegration bzgl. X_1 zu bekommen, das heißt, wir suchen eine Familie $\{Q^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Familie $\{Q^{x,y}, y \in \mathbb{R}\}$ eine reguläre Version der bedingten Verteilung von Q^x gegeben X_1 ist. In diesem Falle könnten wir darstellen

$$Q^{\nu_0}(\cdot) = \iint Q^{x,y}(\cdot) \nu_1^x(dy) \nu_0(dx),$$

wobei $\nu_1^x = Q^x \circ X_1^{-1}$, d.h. $\nu_1^x(dy) = p(0, x; 1, y) m(dy)$. Ist auch ν_0 durch eine m -Dichte p_0 gegeben, so lautet diese Darstellung

$$Q^{\nu_0}(\cdot) = \iint Q^{x,y}(\cdot) p_0(x) p(0, x; 1, y) m(dx) m(dy).$$

Unabhängig davon, ob ν_0 eine Dichte besitzt, hätten wir auf diese Weise eine reguläre Desintegration von Q^{ν_0} bzgl. (X_0, X_1) erzeugt. Existiert eine solche Familie $\{Q^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$, so nennt man sie im Allgemeinen eine Familie von Markovbrücken für Q . Da der Raum $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$ polnisch ist, existiert grundsätzlich eine reguläre Version von $Q^x(\cdot | X_1)$. Diese ist allerdings a priori nur fast sicher definiert und eine Konstruktion der kompletten Familie $\{Q^{x,y}, y \in \mathbb{R}\}$ ist (falls sie überhaupt existiert) nicht trivial. Das gilt insbesondere, wenn man zusätzliche Regularitätseigenschaften fordert. Für gewisse Klassen zeithomogener Markovmaße sind jedoch Konstruktionsverfahren bekannt: Beispielsweise erfolgen Konstruktionen in [FPY92] unter der Voraussetzung, dass ein zu X dualer Prozess existiert, und in [CU11] unter der Voraussetzung, dass X die Feller-Eigenschaft besitzt, jeweils unter Q^x . Des Weiteren wird jeweils die Existenz einer Übergangsdichte $p_t(\cdot, \cdot)$ mit gewissen Stetigkeitseigenschaften vorausgesetzt. Für Details sei auf die entsprechenden Artikel verwiesen. Markovbrücken $Q^{x,y}$ werden für alle $x, y \in \mathbb{R}$ als die Maße mit den folgenden Eigenschaften realisiert:

(i) Es gilt

$$Q^{x,y}(X_0 = x, X_1 = y) = 1.$$

(ii) Für alle $0 \leq t < 1$ gilt

$$\frac{dQ^{x,y}|_{\mathcal{F}_t^0}}{dQ^x|_{\mathcal{F}_t^0}} = \frac{p_{1-t}(X_t, y)}{p_1(x, y)}.$$

Unter Voraussetzung (ii) ist laut [FPY92] der Prozess $\{X_t, t \in [0, 1)\}$ unter $Q^{x,y}$ ein Markovprozess mit Übergangsdichte

$$\frac{p_{t-s}(w, z)p_{1-t}(z, y)}{p_{1-s}(w, y)}, \quad w, z \in \mathbb{R}, 0 \leq s < t \leq 1.$$

Inspiziert von dieser Konstruktion, definieren wir nun, was wir in vorliegender Arbeit unter Markovbrücken verstehen wollen.

Definition 3.2. Sei $Q = \{Q^x, x \in \mathbb{R}\}$ ein Markovmaß mit strikt positiven Übergangsdichten $p(s, w; t, z)$ bzgl. eines σ -endlichen Maßes m auf \mathbb{R} , wobei $w, z \in \mathbb{R}$ und $0 \leq s < t \leq 1$. Unter einer Familie von Q -Brücken verstehen wir (falls existent) eine Familie $\{Q^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ von Verteilungen auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $Q^{x,y}(X_0 = x, X_1 = y) = 1$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist X unter $Q^{x,y}$ ein Markovprozess mit m -Übergangsdichte

$$p^y(s, w; t, z) = \frac{p(s, w; t, z)p(t, z; 1, y)}{p(s, w; 1, y)}, \quad w, z \in \mathbb{R}, 0 \leq s < t < 1. \quad (43)$$

Wie die folgende Proposition zeigt, ist eine Markovbrücke im Sinne obiger Definition auch eine Markovbrücke im eingangs erwähnten Sinne.

Proposition 3.3. *Unter den Bedingungen von Definition 3.2 ist $\{Q^{x,y}, y \in \mathbb{R}\}$ eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit $\{Q^x(\cdot | X_1 = y), y \in \mathbb{R}\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Im folgenden Beweis wird der Dynkinsche π - λ -Satz verwendet. Zur Erinnerung ist dieser Satz und die Definition von Dynkin-Systemen in Anhang B formuliert.

Nach Voraussetzung ist $Q^{x,y}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Damit bleibt es, für alle $A \in \mathcal{B}(C[0, 1])$ die folgenden Aussagen zu zeigen:

a) Die Abbildung $y \mapsto Q^{x,y}(A)$, $y \in \mathbb{R}$, ist messbar.

b) Für alle $B \in \sigma(X_1)$, d.h. $B = \{X_1 \in \tilde{B}\}$ für ein $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gilt

$$Q^x(A \cap B) = \int \mathbf{1}_B Q^{x, X_1}(A) dQ^x,$$

oder gleichbedeutend

$$Q^x(A \cap B) = \int \mathbf{1}_{\tilde{B}}(y) Q^{x,y}(A) p(0, x; 1, y) m(dy). \quad (44)$$

Wir stellen zunächst fest, dass gemäß Formel (11) die $m \otimes \dots \otimes m$ -Dichte von $Q^{x,y} \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}$ durch

$$\begin{aligned} g_{t_1, \dots, t_n}^y(x_1, \dots, x_n) &= p^y(0, x; t_1, x_1) p^y(t_1, x_1; t_2, x_2) \cdots p^y(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{p(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i) p(t_i, x_i; 1, y)}{p(t_{i-1}, x_{i-1}; 1, y)} \\ &= \frac{p(0, x; t_1, x_1) p(t_1, x_1, t_2, x_2) \cdots p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, x_n) p(t_n, x_n; 1, y)}{p(0, x; 1, y)} \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$ und $x_0 = x$. Wir betrachten nun das schnittstabile Erzeugendensystem

$$\mathcal{A} = \{ \{X_{t_i} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\} \mid t_i \in [0, 1], B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } n \in \mathbb{N} \}$$

von $\mathcal{B}(C[0, 1])$. Sei $A \in \mathcal{A}$, d.h.

$$A = \{X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_{n+1}} \in B_{n+1}\} \quad (45)$$

für gewisse $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$ und $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für $i = 0, \dots, n+1$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Die Festlegung $t_0 = 0$ und $t_{n+1} = 1$ stellt keine Einschränkung dar, denn man kann stets $B_0 = \mathbb{R}$ bzw. $B_{n+1} = \mathbb{R}$ wählen. Offensichtlich gilt

$$Q^{x,y}(A) = \mathbf{1}_{B_0}(x) \mathbf{1}_{B_{n+1}}(y) \int_{B_n} \cdots \int_{B_1} g_{t_1, \dots, t_n}^y(x_1, \dots, x_n) dm(x_1) \cdots dm(x_n).$$

Das ist eine messbare Funktion von y , denn g_{t_1, \dots, t_n}^y ist positiv und messbar bzgl. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten nun das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{B}(C[0, 1]) \mid y \mapsto Q^{x,y}(D) \text{ ist messbar}\}.$$

Wir zeigen, dass \mathcal{D} ein Dynkin-System ist: Offenbar gilt $C[0, 1] \in \mathcal{D}$. Weiter gilt für $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subset E$, dass $y \mapsto Q^{x,y}(E \setminus D) = Q^{x,y}(E) - Q^{x,y}(D)$ als Differenz messbarer Funktionen messbar ist, also gilt $E \setminus D \in \mathcal{D}$. Sei schließlich $\{D_i, i \in \mathbb{N}\}$ eine Folge in \mathcal{D} mit $D_1 \subset D_2 \subset \dots$ und sei $D := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$. Dann folgt $Q^{x,y}(D) = \sup_{i \in \mathbb{N}} Q^{x,y}(D_i)$ aus der Maßstetigkeit von unten. Folglich ist $y \mapsto Q^{x,y}(D)$ als Supremum messbarer Funktionen messbar. Damit ist \mathcal{D} ein Dynkin-System und weil $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, folgt $\mathcal{B}(C[0, 1]) = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$ aus dem Dynkinschen π - λ -Satz. Das zeigt a).

Da beide Seiten von Gleichung (44) ein endliches Maß auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ mit Gesamtmasse $Q^x(B)$ definieren, reicht es, die Gleichheit für alle $A \in \mathcal{A}$ zu zeigen, denn \mathcal{A} ist ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(C[0, 1])$. A sei weiterhin durch (45) gegeben. Dann gilt mit $x_0 = x$ und $x_{n+1} = y$

$$Q^{x,y}(A) = \mathbf{1}_{B_0}(x) \mathbf{1}_{B_{n+1}}(y) \int_{B_n} \cdots \int_{B_1} \frac{\prod_{i=1}^{n+1} p(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i)}{p(0, x; 1, y)} dm(x_1) \cdots dm(x_n),$$

also ist die rechte Seite von Gleichung (44) gegeben durch

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{B_0}(x) \int_{B_{n+1} \cap \tilde{B}} \int_{B_n} \cdots \int_{B_1} \prod_{i=1}^{n+1} p(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i) dm(x_1) \cdots dm(x_n) dm(y) \\ &= Q^x(X_0 \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n, X_1 \in B_{n+1} \cap \tilde{B}) = Q^x(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Wie bereits angekündigt, werden wir in Abschnitt 3.3 der Frage nachgehen, ob die α -skalierte Brownsche Brücke die Brücke eines Markovprozesses ist. Im Falle $\alpha \neq 1$ werden wir das für zwei Klassen von Markovprozessen ausschließen können. Eine der beiden Klassen besteht aus gewissen Itô-Diffusionen, die wir nun einführen werden. Anschließend präsentieren wir die Methode, mit deren Hilfe wir zeigen werden, dass $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ nicht die Familie von Brücken eines Mitglieds besagter Klasse ist.

3.1.1. Brücken einer Itô-Diffusion und ihre Charakterisierung

Definition 3.4. Wir bezeichnen mit \mathcal{I} die Menge aller Markovmaße $Q = \{Q^x, x \in \mathbb{R}\}$ mit strikt positiven Lebesgue-Übergangsdichten p , die den folgenden Bedingungen **(B)** genügen.

(B1) Es existieren stetige Funktionen $\mu, \sigma : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ eine schwache Lösung

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (Y, B), \{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\} \quad (46)$$

von

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, & t \in [0, 1] \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (47)$$

mit der Eigenschaft $Q^x = \mathbf{P} \circ Y^{-1}$ existiert.

(B2) Für alle $t \in (0, 1]$ und $z \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion, definiert durch

$$p_{t,z} : [0, t] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (s, w) \mapsto p(s, w; t, z),$$

die Bedingungen

$$\begin{aligned} & p_{t,z} \in C^{1,2}([0, t] \times \mathbb{R}) \\ & \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial w} p_{t,z} = \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial s} p_{t,z}, \end{aligned}$$

wobei beide Seiten der zweiten Gleichung existent seien.

In diesem Falle schreiben wir $Q = I(\mu, \sigma^2)$.

Bemerkung 3.5. Man beachte, dass die Notation $Q = I(\mu, \sigma^2)$ aus obiger Definition praktisch, jedoch etwas nachlässig ist, da sie eigentlich eine Zuordnung $Q \mapsto (\mu, \sigma^2)$ beschreibt, nicht umgekehrt. Die Eindeutigkeit der Zuordnung $Q \mapsto (\mu, \sigma^2)$ folgt aus dem folgenden Lemma 3.6.

Die Frage, ob die Verteilung der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung bereits eindeutig durch deren Koeffizienten bestimmt ist, ist von grundlegendem Interesse und wird in der Literatur intensiv behandelt. Für unsere Zwecke ist jedoch genau die umgekehrte Fragestellung wichtig. Das folgende Lemma besagt, dass (unter gewissen Bedingungen) die Verteilung einer schwachen Lösung die Koeffizienten der zugrundeliegenden stochastischen Differentialgleichung bereits eindeutig bestimmt.

Lemma 3.6. *Seien $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und*

$$(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbf{P}^i), (Y^i, B^i), \{\mathcal{H}_t^i, t \in [0, T]\}$$

jeweils schwache Lösungen von

$$\begin{cases} dX_t = \mu_i(t, X_t) dt + \sigma_i(t, X_t) dB_t, & t \in [0, T] \\ X_0 = x \end{cases} \quad (48)$$

für $i = 1, 2$. Weiter setzen wir voraus, dass Y^1 und Y^2 Markovprozesse mit strikt positiven Lebesgue-Übergangsdichten sind. Dann folgt aus $\mathbf{P}_1 \circ Y_1^{-1} = \mathbf{P}_2 \circ Y_2^{-1}$ bereits $(\sigma_1^2, \mu_1) = (\sigma_2^2, \mu_2)$.

Beweis. Sei $P := \mathbf{P}^1 \circ Y_1^{-1} = \mathbf{P}^2 \circ Y_2^{-1}$. Aus der Itô-Formel folgt, dass für $i = 1, 2$ und alle $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$M_t^{i,f} := f(Y_t^i) - f(Y_0^i) - \int_0^t \mathcal{L}_s^i f(Y_s^i) ds, \quad t \in [0, T]$$

mit

$$\mathcal{L}_s^i = \frac{1}{2} \sigma_i^2(s, \cdot) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_i(s, \cdot) \frac{\partial}{\partial x}$$

ein stetiges lokales Martingal ist. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn wir für $i = 1, 2$ den Prozess Y^i durch den Koordinatenprozess X auf $(C[0, T], \mathcal{B}(C[0, T]), P)$, ausgestattet mit der kanonischen Filtration, ersetzen. Damit ist auch

$$N_t^f := M_t^{1,f} - M_t^{2,f} = \int_0^t (\mathcal{L}_s^2 - \mathcal{L}_s^1) f(X_s) ds, \quad t \in [0, T]$$

unter P ein stetiges lokales Martingal. N^f ist offensichtlich absolut stetig, also insbesondere von endlicher Variation. Außerdem gilt $N_0^f = 0$ P -f.s. Aus Lemma 1.11 folgt $N^f \equiv 0$ P -f.s. Da $s \mapsto (\mathcal{L}_s^2 - \mathcal{L}_s^1) f(X_s)$ stetig ist, folgt weiter $(\mathcal{L}_s^2 - \mathcal{L}_s^1) f(X_s) = 0$ für alle $s \in [0, T]$ P -f.s. Mit der Wahl $f(x) = x$ folgt daraus P -f.s. $\mu_2(s, X_s) - \mu_1(s, X_s) = 0$ für alle $s \in [0, T]$. Wegen der vorausgesetzten Existenz von strikt positiven Übergangsdichten gilt $P(X_s \in U) > 0$ für alle $s \in (0, T]$ und alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, also folgt daraus $\mu_1 = \mu_2$. Mit der Wahl von $f(x) = x^2$ erhalten wir nun ebenso $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. \square

Wir werden nun ein Kriterium entwickeln, mit dem wir erkennen können, ob es sich bei einer betrachteten Familie von Itô-Diffusionen um die Brücken eines Elements $Q \in \mathcal{I}$ handeln kann. Der erste Schritt ist das folgende bekannte Resultat, das besagt, dass die Übergangsdichte einer Itô-Diffusion der zugehörigen Kolmogorov-Rückwärtsgleichung genügt.

Lemma 3.7. *Es sei $I(\mu, \sigma^2) \in \mathcal{I}$ und p die zugehörige Übergangsdichte. Dann gilt für alle $t \in (0, 1]$ und $z \in \mathbb{R}$*

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{t,z}(s, w) + \mu(s, w) \frac{\partial}{\partial w} p_{t,z}(s, w) + \frac{1}{2} \sigma^2(s, w) \frac{\partial^2}{\partial w^2} p_{t,z}(s, w) = 0. \quad (49)$$

Normalerweise werden Resultate dieser Art unter Voraussetzungen an die Koeffizienten μ und σ bewiesen, die die Existenz einer Lösung und der zugehörigen Übergangsdichte garantieren, siehe z.B. [KS91, S. 369]. Um unter den hier betrachteten Bedingungen keinen Zweifel an der Gültigkeit des Lemmas zu lassen, folgt ein kurzer Beweis.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir fixieren $t \in [0, 1)$ und $z \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung existiert ein Prozess Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Standardfiltration und Brownscher Bewegung B , der f.s. $dY_t = \mu(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t$ und $Y_0 = x$ erfüllt. Der Prozess $M^{t,z} := \{p_{t,z}(s, Y_s), s \in [0, t)\}$ ist dann ein Martingal, denn mit der Markoveigenschaft und der Chapman-Kolmogorov Gleichung gilt f.s. für $0 \leq r < s < t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [p_{t,z}(s, Y_s) | \mathcal{F}_r] &= \int p_{t,z}(s, \xi) p(r, Y_r; s, \xi) d\xi \\ &= \int p(r, Y_r; s, \xi) p(s, \xi; t, z) d\xi = p(r, Y_r, t, z) = p_{t,z}(r, Y_r). \end{aligned}$$

Differenzieren von $p_{t,v}(s, Y_s)$ mit der Itô-Formel ergibt

$$\begin{aligned} dp_{t,z}(s, Y_s) &= \left(\frac{\partial}{\partial s} p_{t,z}(s, Y_s) + \mu(s, Y_s) \frac{\partial}{\partial w} p_{t,z}(s, Y_s) + \frac{1}{2} \sigma^2(s, Y_s) \frac{\partial^2}{\partial w^2} p_{t,z}(s, Y_s) \right) ds \\ &\quad + \sigma(s, Y_s) \frac{\partial}{\partial w} p_{t,z}(s, Y_s) dB_s. \end{aligned}$$

Da $M^{t,z}$ ein Martingal und die Semimartingalzerlegung eindeutig ist, verschwindet der Term von endlicher Variation, d.h. es gilt f.s. für alle $s \in [0, t)$

$$\int_0^s \left(\frac{\partial}{\partial r} p_{t,z}(r, Y_r) + \mu(r, Y_r) \frac{\partial}{\partial w} p_{t,z}(r, Y_r) + \frac{1}{2} \sigma^2(r, Y_r) \frac{\partial^2}{\partial w^2} p_{t,z}(r, Y_r) \right) dr = 0.$$

Da der Integrand stetig in r ist, muss auch dieser f.s. für alle $r \in [0, t)$ konstant null sein. Wegen der vorausgesetzten strikten Positivität von p gilt für alle $r \in (0, t)$ und alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, dass $\mathbf{P}[X_r \in U] > 0$. Damit folgt die Gültigkeit von Gleichung (49). \square

Folgende Proposition gibt Aufschluss darüber, welcher Semimartingalzerlegung die Q -Brücken genügen für $Q \in \mathcal{I}$. Diese Proposition entspricht im Wesentlichen [Jam75, Theorem 2], allerdings wird dort unter der Voraussetzung gearbeitet, dass die Koeffizienten μ und σ beschränkt sind.

Proposition 3.8. *Es sei $Q := I(\mu, \sigma^2) \in \mathcal{I}$ und p die zugehörige Übergangsdichte. Für zwei weitere stetige Funktionen $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma} : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die stochastische Differentialgleichung*

$$\begin{cases} dX_t = \tilde{\mu}(t, X_t) dt + \tilde{\sigma}(t, X_t) dB_t \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (50)$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Für alle $T \in (0, 1)$ existiert eine schwache Lösung

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}), (\tilde{Y}, W), \{\mathcal{G}_t, t \in [0, T]\}$$

von Gleichung (50) auf $[0, T]$, so dass \tilde{Y} unter $\tilde{\mathbf{P}}$ ein Markovprozess mit Lebesgue-Übergangsdichte

$$p^y(s, w; t, z) = \frac{p(s, w; t, z)p(t, z; 1, y)}{p(s, w; 1, y)} \quad (51)$$

ist, wobei $0 \leq s < t \leq T$ und $w, z \in \mathbb{R}$.

(ii) Es gelten für alle $t \in [0, 1)$ und $z \in \mathbb{R}$ die Identitäten

$$\tilde{\sigma}^2(t, z) = \sigma^2(t, z), \quad (52)$$

$$\tilde{\mu}(t, z) = \mu(t, z) + \sigma^2(t, z) \frac{\partial}{\partial z} \log p(t, z; 1, y). \quad (53)$$

Beweis von Proposition 3.8. Die Darstellung dieses Beweises ist inspiriert von [Gub16]. Nach Voraussetzung existiert ein Prozess Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Standardfiltration und Brownscher Bewegung B , der f.s. $dY_t = \mu(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t$ sowie $Y_0 = x$ erfüllt und dessen Verteilung Q^x ist. Seien zunächst die Identitäten aus (ii) erfüllt. Wir konstruieren mit Hilfe von Y eine schwache Lösung von Gleichung (50). Sei $T \in [0, 1)$ beliebig. Wir haben im Beweis von (49) gesehen, dass $\{p(t, Y_t; 1, y), t \in [0, T]\}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist. Also ist auch für alle $x, y \in \mathbb{R}$ der Prozess

$$h^{x,y}(t, Y_t) = \frac{p(t, Y_t; 1, y)}{p(0, x; 1, y)}, \quad t \in [0, T]$$

ein Martingal. Außerdem gilt f.s. $h^{x,y}(0, Y_0) = 1$. Folglich können wir mit dem Girsanov-Theorem bzw. den Überlegungen zur Doobschen h -Transformation aus Abschnitt 1.3.3 auf \mathcal{F}_T das Wahrscheinlichkeitsmaß $dQ_T^{x,y} = h^{x,y}(T, Y_T) d\mathbf{P}$ definieren. Unter Beachtung von

$$\frac{\partial}{\partial z} \log h^{x,y}(t, z) = \frac{\partial}{\partial z} \log p(t, z; 1, y)$$

sieht man dann, dass

$$(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T^{x,y}), (Y|_{[0,T]}, \tilde{B}), \{\mathcal{F}_t, t \leq T\}$$

mit der Q_T -Brownschen Bewegung

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \sigma(s, Y_s) \frac{\partial}{\partial x} \log p(s, Y_s, 1, y) ds, \quad t \in [0, T]$$

eine schwache Lösung von (50) ist. Es bleibt zu zeigen, dass $Y|_{[0,T]}$ unter $Q_T^{x,y}$ ein Markovprozess mit Lebesgue-Übergangsdichte p^y ist, d.h., dass für alle messbaren Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $0 \leq s < t \leq T$ f.s.

$$E_{Q_T^{x,y}}(f(Y_t)|\mathcal{F}_s) = \int f(\xi) p^y(s, Y_s; t, \xi) d\xi$$

gilt: Die rechte Seite dieser Gleichung ist offensichtlich \mathcal{F}_s -messbar und unter Beachtung von

$$\begin{aligned} E_{Q_T^{x,y}}(V) &= \mathbf{E}[V h^{x,y}(T, Y_T)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[V h^{x,y}(T, Y_T) | \mathcal{F}_r]] \\ &= \mathbf{E}[V \mathbf{E}[h^{x,y}(T, Y_T) | \mathcal{F}_r]] = \mathbf{E}[V h^{x,y}(r, Y_r)] \end{aligned}$$

für alle $r \leq T$ und \mathcal{F}_r -messbaren Zufallsvariablen V rechnet man für alle $A \in \mathcal{F}_s$

$$\begin{aligned} &E_{Q_T^{x,y}} \left(\mathbf{1}_A \int f(\xi) p^y(s, Y_s; t, \xi) d\xi \right) \\ &= \mathbf{E} \left[h^{x,y}(s, Y_s) \mathbf{1}_A \int f(\xi) p^y(s, Y_s; t, \xi) d\xi \right] \\ &= \mathbf{E} \left[h^{x,y}(s, Y_s) \mathbf{1}_A \int f(\xi) p(s, Y_s; t, \xi) \frac{h^{x,y}(t, \xi)}{h^{x,y}(s, Y_s)} d\xi \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_A \int f(\xi) p(s, Y_s; t, \xi) h^{x,y}(t, \xi) d\xi \right] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[f(Y_t) h^{x,y}(t, Y_t) | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{1}_A f(Y_t) h^{x,y}(t, Y_t) | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A f(Y_t) h^{x,y}(t, Y_t)] \\ &= E_{Q_T^{x,y}}(\mathbf{1}_A f(Y_t)). \end{aligned}$$

Damit ist $(ii) \Rightarrow (i)$ gezeigt.

Nun gelte (i) . Die Lösung $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T^{x,y}), (Y|_{[0,T]}, \tilde{B}), \{\mathcal{F}_t, t \leq T\}$ aus dem ersten Teil des Beweises und $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}), (\tilde{Y}, W), \{\mathcal{G}_t, t \in [0, T]\}$ haben die gleichen Übergangsdichten p^y , also die gleichen Verteilungen auf $(C[0, T], \mathcal{B}(C[0, T]))$ für alle $T \in [0, 1)$. Die Koeffizienten der jeweiligen Differenzialgleichungen sind stetig, also folgt aus Lemma 3.6, dass diese Koeffizienten übereinstimmen müssen. Folglich gelten die Identitäten (52) und (53). \square

Schließlich brauchen wir noch eine Variante eines Resultats aus [Cla91]. Clark zeigt in [Cla91, Theorem 1], dass zwei Itô-Diffusionen mit glattem Drift und Diffusionskoeffizient μ und σ bzw. $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\sigma}$ genau dann die gleichen Brückenprozesse haben, wenn die Identitäten

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

erfüllt sind. Das Paar $(F_{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2}, \tilde{\sigma}^2)$ mit

$$F_{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} \right)$$

ist folglich invariant innerhalb der Klasse der Itô-Diffusionen, deren Brücken mit den Brücken der Itô-Diffusion $dY_t = \mu(t, Y_t) dt + \sigma(t, Y_t) dB_t$ übereinstimmen. Clark nennt diese Invarianten (*lokale*) *reziproke Charakteristiken*. Für unsere Zwecke genügt die folgende „einfache Richtung“ dieses Resultates:

Korollar 3.9. *Eine Itô-Diffusion $I(\mu, \sigma^2) \in \mathcal{I}$ hat dieselben reziproken Charakteristiken wie ihre Brückenprozesse. Das heißt, falls für zwei stetige Funktionen $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma} : [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine schwache Lösung*

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}), (Y, W), \{\mathcal{G}_t, t \in [0, 1)\}$$

von Gleichung (50) existiert, so dass Y ein Markovprozess mit Übergangsdichte (51) ist (p sei die Übergangsdichte von $I(\mu, \sigma^2)$), dann gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= \sigma^2, \\ F_{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2} &= F_{\mu, \sigma^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir folgen der Argumentation in [Thi02]. Sei p die zu $\mathcal{I}(\mu, \sigma^2)$ gehörige Übergangsdichte. Wir wissen aus Proposition 3.8, dass die Identitäten

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2, \quad \tilde{\mu} = \mu + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \log p_{1,y}$$

gelten. Folglich ist

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu}{\sigma^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \log p_{1,y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial}{\partial x} \log p_{1,y} + \sigma^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \log p_{1,y} \right)^2 + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log p_{1,y} \right). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Term in der letzten Zeile verschwindet. Dieser vereinfacht sich unter Verwendung von **(B2)** zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{p_{1,y}} \left(\frac{\partial}{\partial t} p_{1,y} + \mu \frac{\partial}{\partial x} p_{1,y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_{1,y} \right) \right].$$

Der Term in den runden Klammern verschwindet gemäß (49) und somit ist die Aussage bewiesen. \square

3.2. Die α -skalierte Brownsche Brücke ist für $\alpha \neq 1$ nicht Brücke eines Gauß-Markov-Prozesses

Bevor wir uns dem Fall $\alpha \neq 1$ zuwenden, präsentieren wir im folgenden Theorem ein bekanntes Resultat für den Fall $\alpha = 1$: Die Brownsche Brücke kann als Brücke der Brownschen Bewegung aufgefasst werden. Wir erinnern daran, dass für $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{W}^{x,y}$ als diejenige Verteilung auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$ definiert ist, unter der X ein Gaußscher Prozess mit Erwartungswert und Kovarianz gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{W}^{x,y}}(X_t) &= ty + (1-t)x \\ \text{Cov}_{\mathbf{W}^{x,y}}(X_s, X_t) &= s \wedge t - st \end{aligned}$$

für $s, t \in [0, 1]$ ist.

Theorem 3.10. $\{\mathbf{W}^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ ist eine Familie von $\{\mathbf{W}^x, x \in \mathbb{R}\}$ -Brücken.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. $\mathbf{W}^{x,y}(X_0 = x, X_1 = y) = 1$ haben wir bereits in Proposition 2.6 gezeigt. Wir berechnen nun die endlichdimensionalen Verteilungen von $\mathbf{W}^{x,y}$. Seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < 1$. Wie in [KS91, Aufgabe 6.11] vorgeschlagen, rechnen wir zunächst nach, dass unter $\mathbf{W}^{x,y}$ die Zufallsvariablen $Z_i = \frac{X_{t_i}}{1-t_i} - \frac{X_{t_{i-1}}}{1-t_{i-1}}$ für $i = 1, \dots, n$ unabhängig sind: Es gilt für $i < k$

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{\mathbf{W}^{x,y}}(Z_i, Z_k) &= \frac{t_i(1-t_k)}{(1-t_i)(1-t_k)} + \frac{t_{i-1}(1-t_{k-1})}{(1-t_{i-1})(1-t_{k-1})} \\ &\quad - \frac{t_i(1-t_{k-1})}{(1-t_i)(1-t_{k-1})} - \frac{t_{i-1}(1-t_k)}{(1-t_{i-1})(1-t_k)} = 0. \end{aligned}$$

Da (Z_i, Z_k) normalverteilt ist, folgt die Unabhängigkeit bereits aus der somit gezeigten Unkorreliertheit. Weiter gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\mu_i := E_{\mathbf{W}^{x,y}}(Z_i) = \frac{t_i}{1-t_i}y + x - \frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}y - x = \frac{t_i - t_{i-1}}{(1-t_i)(1-t_{i-1})}y$$

und

$$\sigma_i^2 := \text{Var}_{\mathbf{W}^{x,y}}(Z_i) = \frac{t_i(1-t_i)}{(1-t_i)^2} + \frac{t_{i-1}(1-t_{i-1})}{(1-t_{i-1})^2} - 2 \frac{t_{i-1}(1-t_i)}{(1-t_i)(1-t_{i-1})} = \frac{t_i - t_{i-1}}{(1-t_i)(1-t_{i-1})}.$$

Damit ist die gemeinsame Lebesgue-Dichte von (Z_1, \dots, Z_n) gegeben durch

$$f_{t_1, \dots, t_n}^y(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i}\right),$$

wobei $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ für $z \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Transformation

$$J: \left(\frac{x_1}{1-t_1} - \frac{x}{1-t_0}, \dots, \frac{x_n}{1-t_n} - \frac{x_{n-1}}{1-t_{n-1}} \right) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

Die Funktionaldeterminante der inversen Abbildung ist offensichtlich gegeben durch

$$\det D_{J^{-1}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-t_i}.$$

Nach der Transformationsformel für Lebesgue Integrale folgt, dass $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ unter $\mathbf{W}^{x,y}$ die Dichte

$$g_{t_1, \dots, t_n}^y(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(1-t_i)} \varphi\left(\frac{\frac{x_i}{1-t_i} - \frac{x_{i-1}}{1-t_{i-1}} - \mu_i}{\sigma_i}\right)$$

mit $x_0 := x$ besitzt. Direktes Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_i}{1-t_i} - \frac{x_{i-1}}{1-t_{i-1}} - \mu_i \right)^2 &= \left(\frac{x_i}{1-t_i} - \frac{x_{i-1}}{1-t_{i-1}} - \frac{t_i - t_{i-1}}{(1-t_i)(1-t_{i-1})} y \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1-t_i)(1-t_{i-1})} (x_i - x_{i-1})^2 + \frac{t_i - t_{i-1}}{(1-t_i)^2(1-t_{i-1})} (x_i - y)^2 \\ &\quad - \frac{t_i - t_{i-1}}{(1-t_i)(1-t_{i-1})^2} (x_{i-1} - y)^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$g_{t_1, \dots, t_n}^y(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\frac{1}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \varphi\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}\right) \frac{1}{\sqrt{1-t_i}} \varphi\left(\frac{x_i - y}{\sqrt{1-t_i}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-t_{i-1}}} \varphi\left(\frac{x_{i-1} - y}{\sqrt{1-t_{i-1}}}\right)}.$$

Nach Proposition 1.15 ist damit X unter $\mathbf{W}^{x,y}$ ein Markovprozess mit Übergangsdichte (43), wobei

$$p(s, w; t, z) = \frac{1}{\sqrt{t-s}} \varphi\left(\frac{z-w}{\sqrt{t-s}}\right)$$

die Übergangsdichte von \mathbf{W}^x ist. Damit ist die Proposition bewiesen. \square

Nun wollen wir uns damit befassen, ob die α -skalierte Brownsche Brücke auch für $\alpha \neq 1$ die Brücke eines Gauß-Markov-Prozesses ist. Diese Problematik wurde bereits von Mansuy [Man04] behandelt. Wir erinnern daran, dass Mansuy nur α -skalierte Brownsche Brücken zwischen x und 0 betrachtet. Er beantwortet in [Man04, Proposition 4] oben aufgeworfene Frage negativ. Die Aussage dieser Proposition lautet: Für $\alpha \neq 1$ ist die α -skalierte Brownsche Brücke nicht die Brücke eines zentrierten Gauß-Markov-Prozesses. Der dazu angegebene Beweis stellt sich allerdings als nicht vollständig heraus. Die Aussage, die er tatsächlich beweist, lässt sich folgendermaßen formulieren:

Proposition 3.11. *Es existiert kein Gauß-Markov-Prozess mit Start in 0 und Übergangsdichte*

$$p_t(w; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(z-w)^2}{2\sigma_t^2}\right), \quad w, z \in \mathbb{R} \quad (54)$$

für gewisse $\sigma_t > 0, t \in (0, 1]$, so dass die Übergangsdichte von $P_\alpha^{0,0}$ gegeben ist durch

$$p^0(s, w; t, z) = \frac{p_{t-s}(w, z)p_{1-t}(z, 0)}{p_{1-s}(w, 0)}, \quad w, z \in \mathbb{R}, 0 \leq s < t < 1. \quad (55)$$

Wir können an der Übergangsdichte (55) erkennen, dass Mansuy ausschließlich *zeit-homogene* zentrierte Gauß-Markov-Prozesse betrachtet. Wir wollen seinen Beweis kurz angeben.

Beweis. Mansuy führt den folgenden Widerspruchsbeweis. Seien die Übergangsdichten von $P_\alpha^{0,0}$ gegeben durch (55). Die Verteilung des Prozesses mit Übergangsdichte p_t bezeichnen wir mit Q^0 . Für messbare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gilt dann

$$\begin{aligned} E_{P_\alpha^{0,0}}(f(X_t)) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{p_t(0, y)p_{1-t}(y, 0)}{p_1(0, 0)} f(y) dy \\ &= E_{Q^0} \left(\frac{p_{1-t}(X_t, 0)}{p_1(0, 0)} f(X_t) \right) \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1-t}^2}} E_{Q^0} \left(\exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_{1-t}^2}\right) f(X_t) \right). \end{aligned}$$

Mansuy berechnet nun den ersten und letzten Ausdruck aus obiger Gleichungskette für die Funktionen $f = 1$ bzw. $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{1-t}^2}\right)$. Daraus resultieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_{1-t}^2 + \sigma_t^2 \\ \frac{\sigma_{1-t}^2}{\sigma_1^2} &= 1 - \frac{E_{P_\alpha^{0,0}}(X_t^2)}{\sigma_{1-t}^2}. \end{aligned}$$

Durch Kombination dieser Gleichungen ergibt sich

$$E_{P_\alpha^{0,0}}(X_t^2) = \frac{\sigma_t^2 \sigma_{1-t}^2}{\sigma_1^2},$$

das heißt, dass die Varianz der α -skalierten Brownschen Brücke symmetrisch um $t = 1/2$ sein müsste. Schließlich wird ohne Beweis angeführt, dass dies ausschließlich im Falle $\alpha = 1$ zutrifft. Wir schließen diese Lücke im Beweis mit folgendem Argument: Für eine zweimal differenzierbare Funktion $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, die $g(t) = g(1 - t)$ für alle $t \in (0, 1)$ erfüllt, gilt bekanntlich auch $g''(t) = g''(1 - t)$ für alle $t \in (0, 1)$. Für die Varianz der α -skalierten Brownschen Brücke (32) gilt allerdings

$$\frac{d^2}{dt^2} E_{P_\alpha^{0,0}}(X_t^2) = \frac{d^2}{dt^2} \left[(1-t)^{2\alpha} \int_0^t \frac{dr}{(1-r)^{2\alpha}} \right] = -2\alpha(1-t)^{2\alpha-2}.$$

Diese Funktion ist für $\alpha > 1$ streng monoton wachsend und für $\alpha < 1$ streng monoton fallend auf $(0, 1)$, also in keinem dieser Fälle symmetrisch um $t = \frac{1}{2}$. Folglich ist für $\alpha \neq 1$ auch $E_{P_\alpha^{0,0}}(X_t^2)$ nicht symmetrisch um $t = \frac{1}{2}$. \square

Bemerkung 3.12. Auf die in obigem Beweis aus der Widerspruchsannahme hergeleitete Symmetrie von $E_{P_\alpha^{0,0}}(X_t^2)$ um $t = \frac{1}{2}$ hätte man auch folgendermaßen schließen können: Da $p_t(u, v) = p_t(v, u)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$ und $t \in (0, 1]$, gilt

$$p^0(0, 0; t, v) = \frac{p_t(0, v)p_{1-t}(v, 0)}{p_1(0, 0)} = p^0(0, 0; 1 - t, v),$$

das heißt, der Prozess ist zeitsymmetrisch. Diese Symmetrie gilt dann auch für die zweiten Momente:

$$E_{P_\alpha^{0,0}}(X_t^2) = \int v^2 p^0(0, 0; t, v) dv = \int v^2 p^0(0, 0; 1 - t, v) dv = E_{P_\alpha^{0,0}}(X_{1-t}^2).$$

Die von Mansuy angeführte Argumentation bricht natürlich für zeitinhomogene Prozesse in sich zusammen, denn für diese gilt die Symmetrie der bedingten Varianzen nicht notwendigerweise. Wir werden im Folgenden einen vollständigen Beweis für die Proposition von Mansuy angeben. Wir formulieren nun unsere Version der Aussage. Unter einem Gauß-Markov-Maß verstehen wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C[0, 1], \mathcal{B}(C[0, 1]))$, unter dem der Koordinatenprozess X ein Gaußscher Markovprozess ist. Wir betrachten die folgende Klasse von Gauß-Markov-Maßen.

Definition 3.13. Wir bezeichnen mit \mathcal{G} die Menge aller Markovmaße mit strikt positiven Lebesgue-Übergangsdichten, unter denen X ein Gaußscher Prozess ist.

Für die somit definierte Klasse von Verteilungen erhalten wir:

Theorem 3.14. Sei $\alpha \neq 1$. Dann ist $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ keine Familie von Q -Brücken für ein beliebiges Gauß-Markov-Maß $Q \in \mathcal{G}$.

Unser Beweis dieses Theorems wird auf Eigenschaften der Kovarianzfunktion von Gauß-Markov-Prozessen beruhen. Daher fügen wir an dieser Stelle den folgenden Abschnitt ein.

Einige Aussagen zur Kovarianzstruktur Gaußscher Prozesse

In diesem Abschnitt werden wir drei Lemmas über die Kovarianzstruktur Gaußscher Prozesse präsentieren. Da die Zusatzvoraussetzung, dass es sich dabei um einen stetigen Markovprozess handelt, nicht für alle Lemmas relevant ist, arbeiten wir in diesem Abschnitt mit einem Gaußschen Prozess $Y = \{Y_t, t \in [0, 1]\}$ auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Dadurch können wir die folgenden Resultate in größtmöglicher Allgemeinheit präsentieren. Ist im folgenden Abschnitt Y als Markovsch vorausgesetzt, so ist stets Markovsch bzgl. $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_s, s \leq t)$ mit $t \in [0, 1]$ gemeint.

Lemma 3.15. *Sei $Y = \{Y_t, t \in [0, 1]\}$ ein stetiger Gaußscher Prozess. Dann ist die Kovarianzfunktion von Y , d.h. die Abbildung*

$$(s, t) \mapsto c(s, t) := \mathbf{Cov}(Y_s, Y_t), \quad (s, t) \in [0, 1]^2$$

stetig.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass wir o.E. annehmen können, dass Y zentriert ist: Nach Definition eines stetigen Prozesses gilt $\lim_{s \rightarrow t} Y_s = Y_t$ f.s. für alle $t \in [0, 1]$. Für Gaußsche Zufallsvariablen impliziert nach Proposition 1.6 Konvergenz in Wahrscheinlichkeit (also insbesondere fast sichere Konvergenz) bereits L^p -Konvergenz, $p \in [1, \infty)$. Mit $p = 1$ erhalten wir daraus, dass die Funktion $t \mapsto m_t := \mathbf{E}[Y_t]$ stetig ist. Folglich ist $\tilde{Y} = \{Y_t - m_t, t \in [0, 1]\}$ ein stetiger zentrierter Gaußscher Prozess. Da Y und \tilde{Y} die gleiche Kovarianzstruktur besitzen, können wir also o.E. annehmen, dass Y zentriert ist. Damit gilt insbesondere $c(s, t) = \mathbf{E}[Y_s Y_t]$ für $s, t \in [0, 1]$. Seien nun $(t_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $[0, 1]$ mit $t_n^i \rightarrow t^i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$. Wir müssen $c(t_n^1, t_n^2) \rightarrow c(t^1, t^2)$ zeigen. Das folgende Argument ist [Nev68, S. 41] entnommen. Mit Dreiecks- und Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |c(t^1, t^2) - c(t_n^1, t_n^2)| &= |\mathbf{E}[Y_{t^1} Y_{t^2}] - \mathbf{E}[Y_{t_n^1} Y_{t_n^2}]| \\ &\leq \mathbf{E}[|Y_{t^1}(Y_{t^2} - Y_{t_n^2})|] + \mathbf{E}[|Y_{t_n^2}(Y_{t^1} - Y_{t_n^1})|] \\ &\leq \sqrt{\mathbf{E}[Y_{t^1}^2] \mathbf{E}[(Y_{t^2} - Y_{t_n^2})^2]} + \sqrt{\mathbf{E}[Y_{t_n^2}^2] \mathbf{E}[(Y_{t^1} - Y_{t_n^1})^2]}. \end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert gegen 0, denn (wie oben) folgt aus der Stetigkeit von Y bereits $Y_{t_n^i} \rightarrow Y_{t^i}$ in L^2 , also $\mathbf{E}[(Y_{t_n^i} - Y_{t^i})^2] \rightarrow 0$ für $i = 1, 2$ und $\mathbf{E}[Y_{t_n^2}^2]$ ist beschränkt in $n \in \mathbb{N}$. \square

Folgendes Lemma wird den entscheidenden Baustein für den Beweis von Theorem 3.14 liefern.

Lemma 3.16. *Sei $Y = \{Y_t, t \in [0, 1]\}$ ein Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $c(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$. Dann ist Y genau dann Markovsch, wenn für alle $0 \leq s < t < u \leq 1$*

$$c(s, t)c(t, u) = c(t, t)c(s, u). \quad (56)$$

gilt.

Beweis. Sei $m_t := \mathbf{E}[Y_t]$ für $t \in [0, 1]$. Unter Beachtung von $\sigma(Y_t) = \sigma(Y_t - m_t)$ für alle $t \in [0, 1]$ stellen wir mit der Charakterisierung (10) eines Markovprozesses fest, dass Y genau dann Markovsch ist, wenn $\tilde{Y} := \{Y_t - m_t, t \in [0, 1]\}$ Markovsch ist. Da Y und \tilde{Y} die gleiche Kovarianzstruktur besitzen, können wir o.E. annehmen, dass Y zentriert ist. Folgende Argumentation ist eine etwas detailliertere Version von [Nev68, S. 53]. Sei zunächst Y Markovsch und $0 \leq s < t < u \leq 1$. Erneute Anwendung von (10) liefert in Verbindung mit Gleichung (5) im Falle $\mathbf{Var}[Y_t] = c(t, t) \neq 0$

$$\begin{aligned} c(s, u) &= \mathbf{E}[Y_s Y_u] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y_s Y_u | Y_t]] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y_s | Y_t] \mathbf{E}[Y_u | Y_t]] \\ &= \mathbf{E}\left[Y_t \frac{c(s, t)}{c(t, t)} Y_t \frac{c(t, u)}{c(t, t)}\right] = \frac{c(s, t)c(t, u)}{c(t, t)^2} \mathbf{E}[Y_t^2] = \frac{c(s, t)c(t, u)}{c(t, t)}, \end{aligned}$$

somit $c(s, t)c(t, u) = c(t, t)c(s, u)$. Falls $c(t, t) = 0$, gilt auch $c(s, t) = 0$ für alle $s \in [0, 1]$ und somit ist auch dann die Aussage der Proposition erfüllt. Die umgekehrte Implikation ist für unsere Zwecke nicht notwendig, daher skizzieren wir ihren Beweis nur: Es gelte (56). Die Rechnung im ersten Teil dieses Beweises zeigt dann

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[Y_s | Y_t] \mathbf{E}[Y_u | Y_t]] = \mathbf{E}[Y_s Y_u].$$

Da für alle $r \in [0, 1]$ der bedingte Erwartungswert $\mathbf{E}[Y_r | Y_t]$ die orthogonale Projektion im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ von Y_r auf $L^2(\Omega, \sigma(Y_t), \mathbf{P})$ ist (siehe z.B. [Kle13, S. 180]), gilt $\mathbf{E}[(Y_r - \mathbf{E}[Y_r | Y_t])Z] = 0$ für alle $Z \in L^2(\Omega, \sigma(Y_t), \mathbf{P})$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_s Y_u] &= \mathbf{E}[(Y_s - \mathbf{E}[Y_s | Y_t] + \mathbf{E}[Y_s | Y_t])(Y_u - \mathbf{E}[Y_u | Y_t] + \mathbf{E}[Y_u | Y_t])] \\ &= \mathbf{E}[(Y_s - \mathbf{E}[Y_s | Y_t])(Y_u - \mathbf{E}[Y_u | Y_t])] + \mathbf{E}[Y_s Y_u], \end{aligned}$$

also $\mathbf{E}[(Y_s - \mathbf{E}[Y_s | Y_t])(Y_u - \mathbf{E}[Y_u | Y_t])] = 0$. Da Y ein Gaußscher Prozess und $Y_r - \mathbf{E}[Y_r | Y_t]$ eine Linearkombination von Y_r und Y_t für alle $r \in [0, 1]$ ist, folgt aus dieser Unkorreliertheit bereits die Unabhängigkeit der drei σ -Algebren

$$\mathcal{G}_t = \sigma(Y_s - \mathbf{E}[Y_s | Y_t], s \leq t), \quad \mathcal{G}'_t = \sigma(Y_s - \mathbf{E}[Y_s | Y_t], s \geq t), \quad \sigma(Y_t).$$

Offensichtlich gilt $\sigma(\mathcal{G}_t \cup \sigma(Y_t)) = \sigma(Y_s, s \leq t)$ und $\sigma(\mathcal{G}'_t \cup \sigma(Y_t)) = \sigma(Y_s, s \geq t)$. Die Aussage der Proposition folgt nun aus folgender Beobachtung: Sind $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ und \mathcal{H} drei unabhängige σ -Algebren, dann sind $\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ und $\sigma(\mathcal{G}' \cup \mathcal{H})$ gegeben \mathcal{H} unabhängig. Diese Aussage wiederum zeigt man folgendermaßen: Wir setzen

$$\mathcal{A} = \{G \cap H | G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}, \quad \mathcal{A}' = \{G \cap H | G \in \mathcal{G}', H \in \mathcal{H}\}.$$

Dann rechnet man leicht nach, dass für $A \in \mathcal{A}$ und $A' \in \mathcal{A}'$

$$\mathbf{P}[A \cap A' | \mathcal{H}] = \mathbf{P}[A | \mathcal{H}] \mathbf{P}[A' | \mathcal{H}] \quad \text{f.s.} \quad (57)$$

gilt. Schließlich zeigt man die Gültigkeit dieser Gleichung für alle $A \in \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ und $A' \in \sigma(\mathcal{G}' \cup \mathcal{H})$, indem man den Dynkinschen π - λ -Satz zunächst auf den schnittstabilen Erzeuger \mathcal{A} von $\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ und anschließend auf den schnittstabilen Erzeuger \mathcal{A}' von $\sigma(\mathcal{G}' \cup \mathcal{H})$ anwendet. \square

Schließlich brauchen wir noch das folgende Kriterium für die strikte Positivität der Kovarianzfunktion.

Lemma 3.17. *Sei $Y = \{Y_t, t \in [0, 1]\}$ ein Gauß-Markov-Prozess mit stetiger Kovarianzfunktion $(s, t) \mapsto c(s, t) := \mathbf{Cov}(Y_s, Y_t)$, wobei $(s, t) \in [0, 1]^2$. Seien $0 \leq s < t \leq 1$ fest gewählt und sei $\mathbf{Var}[Y_u] > 0$ für alle $u \in [s, t]$. Dann gilt $\mathbf{Cov}(Y_s, Y_t) > 0$.*

Beweis. Der folgende Beweis ist eine detailliertere Version eines Argumentes in [Nev68, S. 55]. Da $c(u, u) = \mathbf{Var}[Y_u] > 0$ für alle $u \in [s, t]$ und die Kovarianzfunktion als stetig vorausgesetzt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $c(u, v) > 0$ für alle $u \in [s, t]$ und $v \in [u, u + \varepsilon] \cap [s, t]$. Andernfalls gäbe es nämlich Folgen $u_n \in [s, t]$ und $\varepsilon_n \rightarrow 0$, so dass $u_n + \varepsilon_n \in [s, t]$ und $c(u_n, u_n + \varepsilon_n) \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da (u_n) beschränkt ist, können wir nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge) $u_n \rightarrow u^* \in [s, t]$ annehmen. Folglich gilt $c(u^*, u^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(u_n, u_n + \varepsilon_n) \leq 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir wählen nun eine Folge $s = u_0 < u_1 < \dots < u_n = t$ mit $u_{i+1} - u_i < \varepsilon$, also $c(u_i, u_{i+1}) > 0$, für alle $i = 0, \dots, n - 1$. Aus Lemma 3.16 folgt nun

$$\begin{aligned} c(s, t) &= \frac{c(s, u_1)c(u_1, t)}{c(u_1, u_1)} = \frac{c(s, u_1)c(u_1, u_2)c(u_2, t)}{c(u_1, u_1)c(u_2, u_2)} \\ &= \dots = \frac{c(s, u_1)c(u_1, u_2)c(u_2, u_3) \cdots c(u_{n-1}, t)}{c(u_1, u_1)c(u_2, u_2) \cdots c(u_{n-1}, u_{n-1})} > 0. \end{aligned}$$

□

Wir haben nun alle nötigen Aussagen über die Kovarianzstruktur Gaußscher Prozesse zusammengetragen und sind bereit für den Beweis unseres Theorems.

Beweis von Theorem 3.14. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Sei also $Q \in \mathcal{G}$ und p die zugehörige strikt positive Übergangsdichte. Wir nehmen an, dass $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von Q -Brücken ist und schreiben $Q^{x,y} = P_\alpha^{x,y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir verwenden die Notation

$$\sigma_{s,t} = \mathbf{Cov}_{Q^x}(X_s, X_t), \quad \sigma_t^2 = \mathbf{Var}_{Q^x}(X_t), \quad m_t = E_{Q^x}(X_t), \quad s, t \in [0, 1]. \quad (58)$$

Wir berechnen nun $\mathbf{Cov}_{Q^{x,y}}(X_s, X_t)$ für $0 < s < t < 1$. Die gemeinsame Dichte von (X_s, X_t) unter $Q^{x,y}$ ist nach Gleichung (11) gegeben durch

$$\begin{aligned} q_{s,t}^{x,y}(w, z) &= p^y(0, x; s, w)p^y(s, w; t, z) \\ &= \frac{p(0, x; s, w)p(s, w; 1, y)}{p(0, x; 1, y)} \cdot \frac{p(s, w; t, z)p(t, z; 1, y)}{p(s, w; 1, y)} \\ &= \frac{p(0, x; s, w)p(s, w; t, z)p(t, z; 1, y)}{p(0, x; 1, y)}. \end{aligned}$$

Im Zähler des obigen Bruchs erkennen wir die Dichte von $Q^x \circ (X_s, X_t, X_1)^{-1}$, im Nenner die Dichte von $Q^x \circ X_1^{-1}$. Diese Verteilungen wiederum sind nach Voraussetzung

Gaußsch, wobei die Verteilungsparameter durch (58) gegeben sind. Als Quotient der beiden Gaußschen Dichten entspricht $q_{s,t}^{x,y}$ nach Formel (4) der Dichte der Verteilung $\mathcal{N}_2\left(\tilde{\mu}(y), \tilde{\Sigma}\right)$, wobei

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(y) &= \begin{pmatrix} m_s \\ m_t \end{pmatrix} + \frac{y - m_1}{\sigma_1^2} \begin{pmatrix} \sigma_{s,1} \\ \sigma_{t,1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s,t} \\ \sigma_{s,t} & \sigma_t^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma_1^2} \begin{pmatrix} \sigma_{s,1} \\ \sigma_{t,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{s,1} & \sigma_{t,1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_{s,t} \\ \sigma_{s,t} & \sigma_t^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma_1^2} \begin{pmatrix} \sigma_{s,1}^2 & \sigma_{s,1}\sigma_{t,1} \\ \sigma_{s,1}\sigma_{t,1} & \sigma_{t,1}^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daraus können wir die Kovarianz von X_s und X_t unter $Q^{x,y}$ ablesen,

$$\text{Cov}_{Q^{x,y}}(X_s, X_t) = \sigma_{s,t} - \frac{\sigma_{s,1}\sigma_{t,1}}{\sigma_1^2}. \quad (59)$$

Nach Voraussetzung ist X unter Q^x ein Gauß-Markov-Prozess, also ist nach Lemma 3.16 die Identität $\sigma_{s,t}\sigma_{t,1} = \sigma_{s,1}\sigma_t^2$ erfüllt. Da X stetig ist, folgt nach Lemma 3.15, dass X unter Q^x eine stetige Kovarianzfunktion besitzt. Aus der Existenz strikt positiver Übergangsdichten folgt außerdem $\sigma_r^2 > 0$ für alle $r \in (0, 1]$, also können wir mit Lemma 3.17 $\sigma_{t,1} > 0$ schließen. Damit erhalten wir

$$\sigma_{s,t} = \frac{\sigma_{s,1}\sigma_t^2}{\sigma_{t,1}}$$

für $0 < s < t < 1$. Einsetzen in (59) liefert

$$\text{Cov}_{Q^{x,y}}(X_s, X_t) = \sigma_{s,1} \left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t,1}} - \frac{\sigma_{t,1}}{\sigma_1^2} \right).$$

Wir vergleichen diesen Ausdruck nun mit der Kovarianzfunktion der α -skalierten Brownschen Brücke,

$$c_\alpha(s, t) = \begin{cases} -\sqrt{(1-s)(1-t)} \log(1-s), & \alpha = \frac{1}{2} \\ \frac{(1-s)^\alpha(1-t)^\alpha(1-(1-s)^{1-2\alpha})}{1-2\alpha}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases},$$

für $s < t$, vgl. Korollar 2.3. Unter der Voraussetzung, dass die α -skalierte Brownsche Brücke eine Q -Brücke ist, stimmen diese Kovarianzfunktionen überein. Da sich beide Kovarianzfunktionen als Produkt der Form $f(t)g(s)$ darstellen lassen, stimmen die ausschließlich von s abhängenden Terme der beiden Funktionen bis auf ein skalares Vielfaches überein. Mit anderen Worten: Es existiert ein $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\sigma_{s,1} = \lambda_\alpha \cdot \begin{cases} -\sqrt{1-s} \log(1-s), & \alpha = \frac{1}{2} \\ (1-s)^\alpha - (1-s)^{1-\alpha}, & \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (60)$$

Im Falle $\alpha > 1$ konvergiert die rechte Seite gegen unendlich für $s \nearrow 1$. Aus der Stetigkeit der Kovarianzfunktion $(s, t) \mapsto \sigma_{s,t}$ folgt damit

$$\sigma_1^2 = \lim_{s \nearrow 1} \sigma_{s,1} = \infty.$$

Das ist ein Widerspruch zur Normalverteilungsannahme an X_1 unter Q^x . Im Falle $\alpha \in (0, 1)$ konvergiert die rechte Seite von (60) gegen 0 für $s \nearrow 1$. Für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ist das klar und für $\alpha = \frac{1}{2}$ folgt das aus

$$-\lim_{s \nearrow 1} \sqrt{1-s} \log(1-s) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log h}{\sqrt{h}} = 0.$$

Für $\alpha < 1$ gilt somit

$$\sigma_1^2 = \lim_{s \nearrow 1} \sigma_{s,1} = 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Existenz strikt positiver Übergangsdichten. Folglich kann $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ keine Familie von Q -Brücken sein und das Theorem ist bewiesen. \square

Bemerkung 3.18. Tatsächlich zeigt obiger Beweis eine stärkere Aussage als die im zugehörigen Theorem formulierte: Für beliebige feste $x, y \in \mathbb{R}$ existiert kein Gauß-Markov-Maß Q^x mit $Q^x(X_0 = x) = 1$ und strikt positiven Übergangsdichten p so dass die Übergangsdichte von $P_\alpha^{x,y}$ durch (43) gegeben ist.

Im obigen Beweis haben wir die durch Lemma 3.16 implizierte Charakterisierung Gaußscher Markovprozesse verwendet. Alternativ kann man Proposition 3.14 auch mit folgender Charakterisierung beweisen:

Proposition 3.19. *Jeder zentrierte Gauß-Markov-Prozess $\{Y_t, t \in (0, 1]\}$ mit stetiger Kovarianzfunktion und $\mathbf{Var}[Y_t] > 0$ für alle $t \in (0, 1]$ lässt sich (in Verteilung) in der Form*

$$Y_t = u(t)B_{v(t)}, \quad t \in (0, 1] \tag{61}$$

darstellen. Dabei ist B eine Brownsche Bewegung, u eine stetige, strikt positive Funktion auf $(0, 1]$ und v eine stetige, monoton wachsende, strikt positive Funktion auf $(0, 1]$. Weiter ist jeder Prozess der Form (61) ein zentrierter Gauß-Markov-Prozess mit stetiger, strikt positiver Kovarianzfunktion.

Beweis. Wir folgen der Argumentation in [Nev68, S. 55]. Nach Lemma 3.17 gilt $c(s, t) := \mathbf{Cov}(Y_s, Y_t) > 0$ für alle $s, t \in (0, 1]$. Sei nun $u_0 \in (0, 1)$ beliebig. Wir definieren zwei Funktionen $a, u : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ durch

$$a(s) = \begin{cases} c(s, u_0), & s \leq u_0 \\ \frac{c(u_0, u_0)c(s, s)}{c(u_0, s)}, & s > u_0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{c(t, t)}{c(t, u_0)}, & t \leq u_0 \\ \frac{c(u_0, t)}{c(u_0, u_0)}, & t > u_0. \end{cases}$$

Unter Verwendung von Formel (56) ergibt sich für alle $s \leq t$ die Identität

$$c(s, t) = a(s)u(t) = u(s)u(t)v(s),$$

wobei wir $v(s) = a(s)/u(s)$ definieren. Die Stetigkeit und strikte Positivität der Kovarianzfunktion $c(\cdot, \cdot)$ überträgt sich auf die Funktionen u und v . Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt $c(s, t)^2 \leq c(s, s)c(t, t)$, also für $s \leq t$

$$(u(s)u(t)v(s))^2 \leq u(s)^2v(s)u(t)^2v(t).$$

Das impliziert wiederum $v(s) \leq v(t)$, d.h. v ist monoton wachsend. Wir definieren nun mittels einer beliebigen Brownschen Bewegung B den Prozess $\tilde{Y}_t = u(t)B_{v(t)}$, $t \in I$. Mit B ist auch \tilde{Y} ein Markovprozess und ein zentrierter Gaußscher Prozess. Für $s \leq t$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\tilde{Y}_s, \tilde{Y}_t) &= u(s)u(t) \mathbf{Cov}(B_{v(s)}, B_{v(t)}) \\ &= u(s)u(t)(v(s) \wedge v(t)) = u(s)u(t)v(s) = c(s, t), \end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt aus der Monotonie von v folgt. Da die Verteilung zentrierter Gaußscher Prozesse eindeutig durch die Kovarianzfunktion bestimmt ist, folgt die behauptete Aussage. \square

Bemerkung 3.20. Ist in obiger Proposition Y auf $[0, 1]$ definiert und gilt $\mathbf{Var}[Y_0] = 0$, so liefert die im Beweis angegebene Konstruktion im Allgemeinen keine Darstellung der Form (61) mit auf ganz $[0, 1]$ stetigen Funktionen u und v . Wir betrachten zum Beispiel den Prozess

$$Y_t = \begin{cases} \frac{B_t}{t^{1/4}}, & t \in (0, 1] \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Dann ist die Kovarianzfunktion

$$c(s, t) = \begin{cases} (s^3/t)^{1/4}, & 0 < s \leq t \leq 1 \\ 0, & 0 = s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

zwar stetig auf $[0, 1]^2$, jedoch gilt für die Funktion u aus obigem Beweis

$$u(t) = \frac{c(t, t)}{c(t, u_0)} = \left(\frac{u_0}{t}\right)^{1/4}$$

für $0 < t \leq u_0$ mit beliebigem $u_0 \in (0, 1)$. Diese ist offensichtlich nicht stetig auf $[0, u_0]$ fortsetzbar.

Mit dieser Darstellung erhalten wir:

Zweiter Beweis von Theorem 3.14. Im ersten Beweis hatten wir unter der Voraussetzung, dass X unter Q^x ein Gauß-Markov-Prozess mit existierenden Übergangsdichten, $Q^x(X_0 = x) = 1$ und Kovarianzfunktion $\sigma_{s,t}$ ist, die Kovarianzfunktion des Brückenprozesses,

$$\text{Cov}_{Q^{x,y}}(X_s, X_t) = \sigma_{s,t} - \frac{\sigma_{s,1}\sigma_{t,1}}{\sigma_1^2}$$

für $0 < s < t < 1$ berechnet. Aus der Existenz von Übergangsdichten folgt $\text{Var}_{Q^x}(X_t) > 0$ für alle $t \in (0, 1]$. Da weiter $(s, t) \mapsto \sigma_{s,t}$ stetig ist, können wir, wie in obiger Proposition,

$$X_t \stackrel{(\mathcal{L})}{=} m(t) + u(t)B_{v(t)}, \quad t \in (0, 1]$$

mit stetigen, strikt positiven Funktionen u, v , mit v monoton wachsend sowie $m(t) = E_{Q^x}(X_t)$ für $t \in (0, 1]$ darstellen. Damit gilt für $s \leq t$

$$\sigma_{s,t} = u(s)u(t)v(s).$$

Einsetzen in die Kovarianzfunktion des Brückenprozesses liefert

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{Q^{x,y}}(X_s, X_t) &= u(s)u(t)v(s) - \frac{u(s)u(1)v(s) \cdot u(t)u(1)v(t)}{u(1)^2v(1)} \\ &= u(s)v(s) \cdot \left(u(t) - \frac{u(t)v(t)}{v(1)} \right). \end{aligned}$$

Wie im ersten Beweis folgt nun durch Vergleich dieses Ausdrucks mit der Kovarianzfunktion der α -skalierten Brownschen Brücke

- Falls $\alpha > 1$:

$$u(s)v(s) \rightarrow \infty \quad \text{für } s \nearrow 1.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen u und v auf $(0, 1]$.

- Falls $\alpha \in (0, 1)$:

$$u(s)v(s) \rightarrow 0 \quad \text{für } s \nearrow 1.$$

Da v als strikt positiv und wachsend vorausgesetzt war, folgt

$$\lim_{s \nearrow 1} u(s) = 0,$$

also mit der Stetigkeit von u auch $u(1) = 0$. Dies steht im Widerspruch zu Annahme $u(s) \neq 0$ für alle $s \in (0, 1]$.

□

3.3. Die α -skalierte Brownsche Brücke ist für $\alpha \neq 1$ nicht Brücke einer Itô-Diffusion

Wir wenden uns erneut zunächst dem Fall $\alpha = 1$ zu. Wie wir bereits wissen, gilt $P_1^{x,y} = \mathbf{W}^{x,y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, und $\{\mathbf{W}^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ ist eine Familie von Markovbrücken für $\{\mathbf{W}^x, x \in \mathbb{R}\}$. Wir verifizieren nun für dieses Beispiel die in Abschnitt 3.1.1 präsentierten Resultate, wobei wir die Brownsche Bewegung als eine Itô-Diffusion auffassen. Offensichtlich ist $W = \{\mathbf{W}^x, x \in \mathbb{R}\}$ ein Element von \mathcal{I} aus Definition 3.4 und es gilt $W = I(0, 1)$. Wie bereits erwähnt, ist die zugehörige Übergangsdichte p gegeben durch (12). Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial z} \log p(t, z; 1, y) = \frac{y - z}{1 - t}.$$

Somit sind gemäß Proposition 3.8 die zugehörigen Brückenprozesse (falls existent) schwache Lösungen von

$$dX_t = \frac{X_t - y}{1 - t} dt + dB_t$$

für $t \in [0, 1)$. Wie zu erwarten, erkennen wir die Gleichung für die Brownsche Brücke, den Brückenprozess der Brownschen Bewegung. Laut Korollar 3.9 gilt weiter, dass Brownsche Bewegung und Brownsche Brücke die gleichen reziproken Charakteristiken besitzen. Für die Brownsche Bewegung sind Drift und Diffusionskoeffizient durch $(\mu, \sigma^2) = (0, 1)$ gegeben und folglich lautet die reziproke Charakteristik $(F_{\mu, \sigma^2}, \sigma^2) = (0, 1)$. Für die Brownsche Brücke sind Drift und Diffusionskoeffizient gegeben durch $\tilde{\mu}_y(t, z) = \frac{y-z}{1-t}$ für $z \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1)$ und $\tilde{\sigma}^2 = 1$. Tatsächlich berechnen sich auch daraus die reziproken Charakteristiken zu $(F_{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2}, \tilde{\sigma}^2) = (0, 1)$, denn es gilt für alle $z \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mu}_y, 1}(t, z) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{y - z}{1 - t} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{y - z}{1 - t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{y - z}{1 - t} \right] \right] \\ &= \frac{y - z}{(1 - t)^2} - \frac{y - z}{(1 - t)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass für $\alpha \neq 1$ die α -skalierten Brownschen Brücken nicht die Familie von Markovbrücken einer Itô-Diffusion $Q \in \mathcal{I}$ sind.

Theorem 3.21. *Sei $\alpha \neq 1$. Dann ist $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ keine Familie von Q -Brücken für eine Itô-Diffusion $Q \in \mathcal{I}$.*

Mit Hilfe der in Abschnitt 3.1 geleisteten Vorarbeit reduziert sich der Beweis von Theorem 3.21 auf die einfache Berechnung von Ableitungen des Driftkoeffizienten der α -skalierten Brownschen Brücke:

Beweis von Theorem 3.21. Nehmen wir an, dass $\{P_\alpha^{x,y}, x, y \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von Q -Brücken ist und sei $Q = I(\mu, \sigma^2)$ sowie p die zugehörige Übergangsdichte. Nach Definition sind dann die Übergangsdichten von $P_\alpha^{x,y}$ gegeben durch p^y aus Gleichung (51). Mit Korollar 3.9 folgt dann, dass für Drift und Diffusionskoeffizienten der α -skalierten Brownschen Brücke von x nach y ,

$$\tilde{\mu}_y(t, z) = \alpha \frac{y - z}{1 - t}, \quad \tilde{\sigma}^2(t, z) = 1,$$

die Identitäten $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$ und $F_{\mu, \sigma^2} = F_{\tilde{\mu}_y, \tilde{\sigma}^2}$ erfüllt sein müssen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mu}_y, \tilde{\sigma}^2}(t, z) &= \frac{\partial \tilde{\mu}_y}{\partial t \tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{\mu}_y^2}{\tilde{\sigma}^2} + \tilde{\sigma}^2 \frac{\partial \tilde{\mu}_y}{\partial z \tilde{\sigma}^2} \right) \\ &= \alpha \frac{y - z}{(1 - t)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha^2 \frac{(y - z)^2}{(1 - t)^2} - \alpha \frac{1}{(1 - t)} \right) \\ &= \alpha \frac{y - z}{(1 - t)^2} - \alpha^2 \frac{y - z}{(1 - t)^2} \\ &= \alpha(1 - \alpha) \frac{y - z}{(1 - t)^2}. \end{aligned}$$

Dieser Term ist jedoch für $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ von y abhängig und kann folglich nicht für alle $y \in \mathbb{R}$ mit F_{μ, σ^2} übereinstimmen. \square

Bemerkung 3.22. Schließlich wollen wir uns klarmachen, dass weder Theorem 3.21 bereits aus Theorem 3.14 folgt, noch umgekehrt. Mit anderen Worten: Es gilt weder $\mathcal{G} \subset \mathcal{I}$ noch $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$. Sei dazu B eine Brownsche Bewegung auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum, der mit einer Standardfiltration ausgestattet ist. Zunächst ist klar, dass nicht jede Itô-Diffusion ein Gaußscher Prozess ist. Wir bezeichnen mit \sinh^{-1} die Umkehrfunktion von \sinh . Dann ist beispielsweise der nicht-Gaußsche Prozess

$$Y^x = \{\sinh(\hat{x} + B_t), t \in [0, 1]\}$$

mit $\hat{x} = \sinh^{-1}(x)$ eine Itô-Diffusion mit Semimartingalzerlegung

$$dY_t^x = \sqrt{1 + (Y_t^x)^2} dB_t + \frac{1}{2} Y_t^x dt, \quad Y_0^x = x.$$

Um zu zeigen, dass die Verteilung von Y^x , $x \in \mathbb{R}$, in \mathcal{I} liegt, bestimmen wir die Übergangsdichten von Y^x . Für messbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $s < t$ gilt f.s.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(Y_t^x) | \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[f(\sinh(\hat{x} + B_t)) | \hat{x} + B_s] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int f(\sinh(r)) \exp\left(-\frac{(r - (\hat{x} + B_s))^2}{2(t-s)}\right) dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int f(h) \exp\left(-\frac{(\sinh^{-1}(h) - \sinh^{-1}(Y_s^x))^2}{2(t-s)}\right) \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} dh, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $h = \sinh(r)$ und $\frac{d}{dh} \sinh^{-1}(h) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}}$ für $h \in \mathbb{R}$ verwendet haben. Folglich ist Y^x ein zeithomogener Markovprozess mit Übergangsdichte

$$p_t(w, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(\sinh^{-1}(z) - \sinh^{-1}(w))^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad z, w \in \mathbb{R}$$

für $t \in (0, 1]$. Also sind offensichtlich die Bedingungen **(B)** erfüllt.

Nun geben wir ein Beispiel eines stetigen Gauß-Markov-Prozesses mit glatten Übergangsdichten an, der keine Itô-Diffusion ist. Sei dazu $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige, auf $(0, 1)$ strikt positive Funktion. Weiter sei u von endlicher Variation, allerdings nicht absolut stetig. Ein Beispiel einer solchen Funktion ist die Cantorfunktion. Diese kann man zum Beispiel als Verteilungsfunktion von $Z = \sum_{i=1}^{\infty} 2X_i/3^i$ für eine iid Folge X_1, X_2, \dots mit $\mathbf{P}[X_i = 0] = \mathbf{P}[X_i = 1] = \frac{1}{2}$ definieren, siehe z.B. [Wen08, S. 76]. Nach Proposition 3.19 ist $Y^x = \{x + u(t)B_t, t \in [0, 1]\}$ ein Gauß-Markov-Prozess. Die Existenz von strikt positiven Übergangsdichten für Y^x ist offensichtlich, da Y^x eine deterministische räumliche Skalierung der Brownschen Bewegung ist. Die partielle Integrationsformel (20) liefert die Semimartingalzerlegung

$$d(x + u(t)B_t) = B_t du_t + u_t dB_t.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Semimartingalzerlegung und weil u nicht absolut stetig ist, kann dieser Prozess keine Itô-Diffusion sein. Folglich liegt die Verteilung von Y^x , $x \in \mathbb{R}$, nicht in \mathcal{I} .

4. Schätzung von α

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Standardfiltration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$ und einer Brownschen Bewegung $B = \{B_t, t \in [0, 1]\}$. Sei $X : \Omega \rightarrow C[0, 1]$ eine α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y bezüglich dieser Objekte. Weiter sei $T \in (0, 1)$. Wir betrachten die Schätzung von α auf Basis einer Beobachtung

$$\xi^T = \xi|_{[0, T]},$$

wobei ξ eine Realisierung von X sei. Wir werden uns mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS) für α beschäftigen. Ziel dieses Abschnittes ist es, für den Fall $x = y = 0$ existierende Resultate (siehe [BP10b], [GT14]) über den MLS für α , auf allgemeine x und y zu erweitern. Man könnte zunächst vermuten, dass diese Verallgemeinerung unnötig ist, da man durch Betrachtung von $\xi \cdot \mathbf{E}[X \cdot]$ stets ohne Einschränkung annehmen kann, dass $x = y = 0$ gilt. Das ist jedoch aus statistischer Sicht nicht sinnvoll, da $\mathbf{E}[X \cdot]$ vom unbekanntem Parameter α abhängt, vgl. Korollar 2.3. Für die Beweise dieser Resultate können wir die für den Fall $x = y = 0$ bekannten Methoden beibehalten, die Berechnungen werden allerdings deutlich aufwendiger. Zunächst werden wir die gemeinsame Laplace-Transformation zweier Funktionale der α -skalierten Brownschen Brücke berechnen. Das wird uns insofern hilfreich sein, als dass sich der MLS für α als Funktion dieser beiden Funktionale schreiben lässt. Als Anwendung dieser Laplace-Transformation werden wir die starke Konsistenz des MLS für $T \nearrow 1$ nachweisen sowie seinen Bias (für $T < 1$) berechnen.

Bemerkung 4.1. Tatsächlich wird in [BP10b], allgemeiner als die α -skalierte Brownsche Brücke zwischen 0 und 0, der Prozess, gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\begin{cases} dX_t = \alpha b(t)X_t dt + \sigma(t) dB_t & t \in [0, T) \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

betrachtet. Dabei sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $b, \sigma : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen mit $\sigma(t) > 0$, $b(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{b(t)}{\sigma(t)^2} \right] = -2K \frac{b(t)^2}{\sigma(t)^2}, \quad t \in [0, T)$$

für ein gewisses $K \in \mathbb{R}$ genügen. Offensichtlich ist die α -skalierte Brownsche Brücke zwischen 0 und 0 ein solcher Prozess, wobei $b(t) = -\frac{1}{1-t}$, $\sigma \equiv 1$ und $K = \frac{1}{2}$.

Zunächst bestimmen wir den MLS für α . Dazu gehen wir analog zu [BP10b] bzw. [Gö14] vor, die den Fall $x = y = 0$ behandeln. Wir schreiben abkürzend $L_T(\alpha, \xi)$, $l_T(\alpha, \xi)$ sowie $\hat{\alpha}_T(\xi)$ anstelle von $L_T(\alpha, \xi^T)$, $l_T(\alpha, \xi^T)$ sowie $\hat{\alpha}_T(\xi^T)$ für (log-)Likelihood-Funktion und den MLS für α basierend auf einer Beobachtung ξ^T . Gemäß Proposition 2.12 sowie Lemma 2.13 und der darauffolgenden Bemerkung ist die Likelihood-Funktion für X^T

gegeben durch

$$\begin{aligned} L_T(\alpha; X) &= \exp \left(\alpha \int_0^T \frac{y - X_s}{1 - s} dX_s - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} ds \right) \\ &= \frac{1}{(1 - T)^{\alpha/2}} \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \left[\frac{(y - X_T)^2}{1 - T} - (y - x)^2 \right] - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} ds \right). \end{aligned}$$

Folglich ist die log-Likelihood-Funktion $l_T = \log L_T$ gegeben durch

$$l_T(\alpha; X) = \alpha \int_0^T \frac{y - X_s}{1 - s} dX_s - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} ds \quad (62)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \log \frac{1}{1 - T} - \frac{\alpha}{2} \left[\frac{(y - X_T)^2}{1 - T} - (y - x)^2 \right] - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1 - s)^2} ds. \quad (63)$$

Auch hier ist es von Vorteil, die Darstellung ohne stochastisches Integral zu haben, denn so gibt es kein Problem bei der Definition und Berechnung von $l_T(\alpha; \xi)$ für eine Realisierung ξ von X . Die Maximum-Likelihood-Schätzung ist definiert durch

$$\hat{\alpha}_T(\xi) = \arg \max_{\alpha > 0} l_T(\alpha; \xi).$$

Zur Bestimmung von $\hat{\alpha}_T(\xi)$ betrachten wir die Likelihood-Gleichung

$$\frac{d}{d\alpha} l_T(\alpha; \xi) = 0,$$

d.h.

$$\frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - T} - \frac{1}{2} \left[\frac{(y - \xi_T)^2}{1 - T} - (y - x)^2 \right] - \frac{2\alpha - 1}{2} \int_0^T \frac{(y - \xi_s)^2}{(1 - s)^2} ds = 0.$$

Diese Gleichung hat die eindeutige Lösung

$$\hat{\alpha}_T(\xi) = \frac{\log \frac{1}{1 - T} - \left[\frac{(y - \xi_T)^2}{1 - T} - (y - x)^2 \right] + \int_0^T \frac{(y - \xi_s)^2}{(1 - s)^2} ds}{2 \int_0^T \frac{(y - \xi_s)^2}{(1 - s)^2} ds}. \quad (64)$$

Wir bemerken, dass diese Lösung nicht notwendigerweise positiv ist. Aus

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} l^T(\alpha; \xi) = - \int_0^T \frac{(y - \xi_s)^2}{(1 - s)^2} ds < 0$$

für $P_\alpha^{x,y}$ -fast alle $\xi \in C[0, 1]$ folgt, dass (64) f.s. die Likelihood-Funktion maximiert und wir erhalten:

Proposition 4.2. *Sei ξ eine Realisierung von $X \sim P_\alpha^{x,y}$. Dann existiert basierend auf der Beobachtung $\xi^T = \xi|_{[0,T]}$ f.s. eine eindeutig bestimmte ML-Schätzung für α in \mathbb{R} und ist gegeben durch (64).*

Bemerkung 4.3. Indem wir die log-Likelihood-Funktion in der Darstellung, die ein stochastisches Integral enthält, maximieren (bzw. Gleichung (42) auf den MLS (64) anwenden), erhalten wir die alternative Darstellung

$$\hat{\alpha}_T(X) = \frac{\int_0^T \frac{y-X_s}{1-s} dX_s}{\int_0^T \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds}$$

für den MLS. Wie bereits erwähnt, ist a priori nicht klar, wie dieser Schätzer an einer Stelle $X = \xi$ ausgewertet werden sollte. Setzen wir allerdings die Semimartingalzerlegung $dX_t = \alpha \frac{y-X_t}{1-t} dt + dB_t$ ein, so erhalten wir die folgende Darstellung für die Differenz von Schätzer und zu schätzendem Parameter:

$$\hat{\alpha}_T(X) - \alpha = \frac{\int_0^T \frac{y-X_s}{1-s} dB_s}{\int_0^T \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds}. \quad (65)$$

Diese Darstellung wird uns beim Nachweis der starken Konsistenz des MLS nützlich sein.

4.1. Vorbereitung: Laplace-Transformation der für den MLS relevanten Funktionale

Die Untersuchung der Eigenschaften des MLS für α basiert auf der Tatsache, dass für eine α -skalierte Brownsche Brücke von x nach y die gemeinsame Laplace-Transformation von $(y - X_t)^2$ und $\int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds$ analytisch zugänglich ist und sich der MLS als Funktion dieser Terme ausdrücken lässt. Die folgende Proposition ist eine Verallgemeinerung von [BP10b, Theorem 21], wo der Fall $x = y = 0$ behandelt wird.

Proposition 4.4. *Es sei X eine α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y . Dann gilt für alle $\mu > 0$ und $\nu \geq 0$*

$$\begin{aligned} \psi_t(\mu, \nu; \alpha) &:= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\mu \int_0^t \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds - \nu (y - X_t)^2 \right) \right] \\ &= \frac{\exp \left(\frac{2\alpha-1}{4} \left((x-y)^2 + \log \frac{1}{1-t} \right) \right)}{\sqrt{c_t(\mu; \alpha) + \frac{G_t(\nu; \alpha)}{2F(\mu; \alpha)} s_t(\mu; \alpha)}} \exp \left[\frac{(x-y)^2}{2} \cdot \frac{F(\mu; \alpha) s_t(\mu; \alpha) + \frac{G_t(\nu; \alpha)}{2} c_t(\mu; \alpha)}{c_t(\mu; \alpha) + \frac{G_t(\nu; \alpha)}{2F(\mu; \alpha)} s_t(\mu; \alpha)} \right], \end{aligned}$$

wobei

$$F(\mu; \alpha) = \sqrt{2\mu + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2}, \quad G_t(\nu; \alpha) = 1 - 2\alpha - 4\nu(1-t)$$

sowie

$$c_t(\mu; \alpha) = \cosh \left(F(\mu; \alpha) \log(1-t) \right), \quad s_t(\mu; \alpha) = \sinh \left(F(\mu; \alpha) \log(1-t) \right).$$

Für den Beweis brauchen wir die folgende Formel für die Laplace-Transformation des Quadrats einer normalverteilten Zufallsvariable.

Lemma 4.5. *Sei $Z \sim \mathcal{N}(a, \gamma^2)$ und $s \geq 0$, dann gilt*

$$\mathbf{E} \left[e^{-sZ^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2s\gamma^2 + 1}} \exp \left(-\frac{sa^2}{2s\gamma^2 + 1} \right). \quad (66)$$

Beweis. Es gilt $\sqrt{s}Z \sim \mathcal{N}(\sqrt{sa}, s\gamma^2)$ und folglich für $s > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[e^{-sZ^2} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s\gamma^2}} \int e^{-z^2} \exp \left(-\frac{(z - \sqrt{sa})^2}{2s\gamma^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s\gamma^2}} \int \exp \left(-\frac{(2s\gamma^2 + 1)z^2 - 2\sqrt{sa}z + sa^2}{2s\gamma^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s\gamma^2}} \int \exp \left(-\frac{\left(\sqrt{2s\gamma^2 + 1}z - \frac{\sqrt{sa}}{\sqrt{2s\gamma^2 + 1}} \right)^2 - \frac{sa^2}{2s\gamma^2 + 1} + sa^2}{2s\gamma^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s\gamma^2}} \int \exp \left(-\frac{\left(\sqrt{2s\gamma^2 + 1}z - \frac{\sqrt{sa}}{\sqrt{2s\gamma^2 + 1}} \right)^2}{2s\gamma^2} \right) dz \cdot \exp \left(\frac{\frac{sa^2}{2s\gamma^2 + 1} - sa^2}{2s\gamma^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2s\gamma^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{s\gamma^2}{2s\gamma^2 + 1}}} \int \exp \left(-\frac{\left(z - \frac{\sqrt{sa}}{2s\gamma^2 + 1} \right)^2}{2\frac{s\gamma^2}{2s\gamma^2 + 1}} \right) dz \cdot \exp \left(-\frac{sa^2}{2s\gamma^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2s\gamma^2 + 1}} \exp \left(-\frac{sa^2}{2s\gamma^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 4.4. Sei $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig und X^β sei die eindeutige starke Lösung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \beta \frac{y - X_t}{1 - t} dt + dB_t, \quad X_0 = x$$

für $t \in [0, 1)$. Für $\beta > 0$ ist dieser Prozess eine β -skalierte Brownsche Brücke. Für die meisten in Abschnitt 2 präsentierten Resultate ist die Voraussetzung $\beta > 0$ unerheblich. So gelten insbesondere die Lösungsformel (29), die in Korollar 2.3 genannten Verteilungseigenschaften und die in Korollar 2.16 zur Äquivalenz der Verteilungen getroffenen Aussagen genauso für $\beta \leq 0$. Einzig das deterministische Verhalten $X_t^\beta \rightarrow y$

f.s. für $t \nearrow 1$ liegt im Falle $\beta \leq 0$ nicht vor, spielt aber in diesem Abschnitt auch keine Rolle. Für $t \in (0, 1)$ sei

$$M_{\beta, \alpha, t} = \frac{1}{(1-t)^{(\alpha-\beta)/2}} \exp \left(-\frac{\alpha-\beta}{2} \left[\frac{(y-X_t)^2}{1-t} - (y-x)^2 + (\alpha+\beta-1) \int_0^t \frac{(y-X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right] \right).$$

Nach Korollar 2.16 ist unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mathbf{P}_{\beta, \alpha, t} = M_{\beta, \alpha, t} d\mathbf{P}$ auf \mathcal{F}_t der Prozess $X^\beta|_{[0, t]}$ eine α -skalierte Brownsche Brücke von x nach y . Damit können wir darstellen

$$\begin{aligned} \psi_t(\mu, \nu; \alpha) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\mu \int_0^t \frac{(y-X_s^\beta)^2}{(1-s)^2} ds - \nu(y-X_t^\beta)^2 \right) \cdot M_{\beta, \alpha, t} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} (2\mu - \alpha + \beta + \alpha^2 - \beta^2) \int_0^t \frac{(y-X_s^\beta)^2}{(1-s)^2} ds - \frac{1}{2} \left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t} \right) (y-X_t^\beta)^2 + \frac{\alpha-\beta}{2} \left((y-x)^2 + \log \frac{1}{1-t} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\beta = \frac{1}{2} - \sqrt{2\mu + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2}.$$

Damit erreichen wir $2\mu - \alpha + \beta + \alpha^2 - \beta^2 = 0$ und folglich gilt

$$\begin{aligned} \psi_t(\mu, \nu; \alpha) &= \exp \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \left((y-x)^2 + \log \frac{1}{1-t} \right) \right) \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t} \right) (y-X_t^\beta)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Da $\mu > 0$ vorausgesetzt ist, gilt $\beta \neq \frac{1}{2}$. Aus Korollar 2.3 folgt dann

$$X_t^\beta - y \sim \mathcal{N}(E(t; \beta), V(t; \beta)),$$

wobei

$$\begin{aligned} E(t; \beta) &:= \mathbf{E} [X_t^\beta - y] = (1-t)^\beta (x-y) \\ V(t; \beta) &:= \mathbf{Var} [X_t^\beta - y] = \frac{1-t - (1-t)^{2\beta}}{2\beta - 1}. \end{aligned}$$

Da $\alpha - \beta = \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{2\mu + (\alpha - \frac{1}{2})^2} > 0$ für $\mu > 0$, können wir mit Formel (66)

berechnen

$$\begin{aligned}
\psi_t(\mu, \nu; \alpha) &= \frac{\exp\left(\frac{\alpha-\beta}{2} \left(\log \frac{1}{1-t} + (x-y)^2\right)\right)}{\sqrt{\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)V(t; \beta) + 1}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)E(t; \beta)^2}{\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)V(t; \beta) + 1}\right) \\
&= \frac{\exp\left(\frac{2\alpha-1}{4} \left(\log \frac{1}{1-t} + (x-y)^2\right)\right) (1-t)^{-\sqrt{2\mu+(\alpha-\frac{1}{2})^2}/2}}{\sqrt{\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)V(t; \beta) + 1}} \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{2\mu+(\alpha-\frac{1}{2})^2}}{2} (x-y)^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)E(t; \beta)^2}{\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)V(t; \beta) + 1}\right). \quad (67)
\end{aligned}$$

Wir merken an, dass an dieser Stelle die eigentliche Verallgemeinerung des Falles $x = y = 0$ stattfindet: Falls $x = y = 0$, ist auch $E(t; \beta) = 0$ und entsprechend erhält man dann einen deutlich einfacheren Ausdruck für ψ_t .

Nun bleibt es, die Terme geeignet zusammenzufassen. Dazu schreiben wir abkürzend $F = F(\mu; \alpha)$ und $G = G_t(\nu; \alpha)$. Damit ist $\beta = \frac{1}{2} - F$. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\left(2\nu + \frac{\alpha - \beta}{1-t}\right) V(t; \beta) + 1 &= \frac{2\nu(1-t) + \alpha - \frac{1}{2} + F}{1-t} \cdot \frac{1-t - (1-t)^{1-2F}}{-2F} + 1 \\
&= \frac{\left(\frac{G}{4F} - \frac{1}{2}\right) \left((1-t)^F - (1-t)^{-F}\right) + (1-t)^F}{(1-t)^F} \\
&= \frac{\left(\frac{G}{4F} + \frac{1}{2}\right) (1-t)^F - \left(\frac{G}{4F} - \frac{1}{2}\right) (1-t)^{-F}}{(1-t)^F} \\
&= \frac{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))}{(1-t)^F}. \quad (68)
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(2\nu + \frac{\alpha - \beta}{1-t}\right) E(t; \beta)^2 &= \frac{2\nu(1-t) + \alpha - \beta}{2(1-t)} (1-t)^{2\beta} (x-y)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(F - \frac{G}{2}\right) (1-t)^{-2F} (x-y)^2.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)E(t; \beta)^2}{\left(2\nu + \frac{\alpha-\beta}{1-t}\right)V(t; \beta) + 1} &= \frac{\frac{1}{2} \left(F - \frac{G}{2}\right) (1-t)^{-F} (x-y)^2}{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))} \\
&= \frac{\frac{F}{2} \left(1 - \frac{G}{2F}\right) (1-t)^{-F} (x-y)^2}{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2\mu + (\alpha - \frac{1}{2})^2}}{2} (x - y)^2 - \frac{\frac{1}{2}(2\nu + \frac{\alpha - \beta}{1-t})E(t; \beta)^2}{(2\nu + \frac{\alpha - \beta}{1-t})V(t; \beta) + 1} \\
&= \frac{F}{2} (x - y)^2 \cdot \frac{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t)) - (1 - \frac{G}{2F})(1-t)^{-F}}{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))} \\
&= \frac{F}{2} (x - y)^2 \cdot \left[\frac{\frac{1}{2}((1-t)^F + (1-t)^{-F}) + \frac{G}{2F} \frac{1}{2}((1-t)^F - (1-t)^{-F})}{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{G}{2F}(1-t)^{-F} - (1-t)^{-F}}{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))} \right] \\
&= \frac{(x - y)^2}{2} \cdot \frac{F \sinh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2} \cosh(F \log(1-t))}{\cosh(F \log(1-t)) + \frac{G}{2F} \sinh(F \log(1-t))}. \tag{69}
\end{aligned}$$

Einsetzen von (68) und (69) in (67) liefert schließlich die behauptete Darstellung. \square

4.2. Starke Konsistenz des MLS

Als erste Anwendung der eben hergeleiteten expliziten Formel der Laplace-Transformation erhalten wir die starke Konsistenz des MLS für α . Folgende Proposition folgt im Falle $x = y = 0$ aus [BP10b, Theorem 20].

Proposition 4.6. *Der MLS (64) ist stark konsistent für α , d.h. es gilt*

$$\mathbf{P} \left[\lim_{T \nearrow 1} \hat{\alpha}_T(X) = \alpha \right] = 1$$

für alle $\alpha > 0$.

Beweis. Wir betrachten Darstellung (65) für die Differenz $\hat{\alpha}_T(X) - \alpha$. Diese ist offensichtlich vom Typ $\frac{M_T}{\langle M \rangle_T}$, wobei M ein lokales Martingal ist. Nach dem starken Gesetz großer Zahlen für lokale Martingale (Proposition 2.9), folgt aus $\lim_{T \nearrow 1} \langle M \rangle_t = \infty$ \mathbf{P} -f.s. bereits $\lim_{T \nearrow 1} \frac{M_T}{\langle M \rangle_T} = 0$ \mathbf{P} -f.s., also die starke Konsistenz des MLS. Wir zeigen nun gleichbedeutend zu $\mathbf{P}[\lim_{T \nearrow 1} \langle M \rangle_t = \infty] = 1$, dass

$$\mathbf{E} \left[\exp \left(- \lim_{T \nearrow 1} \langle M \rangle_T \right) \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \lim_{T \nearrow 1} \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right) \right] = 0$$

gilt: Aus der Stetigkeit von $h \mapsto e^{-h}$ sowie $|e^{-h}| \leq 1$ für $h \geq 0$ (dominierte Konvergenz) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[\exp \left(- \lim_{T \nearrow 1} \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right) \right] &= \lim_{T \nearrow 1} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right) \right] \\
&= \lim_{T \nearrow 1} \psi_T(1, 0; \alpha).
\end{aligned}$$

Aus Proposition 4.4 können wir ablesen

$$\begin{aligned} \psi_T(1, 0; \alpha) &= \frac{\exp\left(\frac{2\alpha-1}{4}(x-y)^2\right) (1-T)^{(1-2\alpha)/4}}{\sqrt{c_T(1; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F} s_T(1; \alpha)}} \exp\left[\frac{(x-y)^2}{2} \cdot \frac{F s_T(1; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2} c_T(1; \alpha)}{c_T(1; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F} s_T(1; \alpha)}\right], \end{aligned}$$

wobei wir die Abkürzung $F = \sqrt{2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}$ verwenden. Zunächst gilt

$$\frac{F s_T(1; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2} c_T(1; \alpha)}{c_T(1; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F} s_T(1; \alpha)} = F \frac{\left(1 + \frac{1-2\alpha}{2F}\right)(1-T)^F - \left(1 - \frac{1-2\alpha}{2F}\right)(1-T)^{-F}}{\left(1 + \frac{1-2\alpha}{2F}\right)(1-T)^F + \left(1 - \frac{1-2\alpha}{2F}\right)(1-T)^{-F}} \rightarrow -F$$

für $T \nearrow 1$, denn es gilt $F > 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{c_T(1; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F} s_T(1; \alpha)}{(1-T)^{(1-2\alpha)/2}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1-2\alpha}{2F}\right)(1-T)^F + \left(1 - \frac{1-2\alpha}{2F}\right)(1-T)^{-F}}{(1-T)^{(1-2\alpha)/2}} \\ &= \frac{2F + 1 - 2\alpha}{4F} (1-T)^{(2F-1+2\alpha)/2} + \frac{2F - 1 + 2\alpha}{4F} (1-T)^{(-2F-1+2\alpha)/2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für $T \nearrow 1$, denn es gilt $\pm 2F - 1 + 2\alpha = \pm \sqrt{8 + (2\alpha - 1)^2} + 2\alpha - 1 \gtrless 0$. Folglich konvergiert die Wurzel des Kehrwerts gegen 0 und wir erhalten insgesamt $\lim_{T \nearrow 1} \psi_T(1, 0; \alpha) = 0$. Damit ist die Proposition bewiesen. \square

Bemerkung 4.7. Im Falle $x = y = 0$ und $\alpha > \frac{1}{2}$ zeigen Barczy und Pap in [BP10b] neben der starken Konsistenz auch die asymptotische Normalität des MLS für $T \nearrow 1$. Man könnte versuchen auch dieses Resultat auf allgemeine x und y zu erweitern. Diesen Weg werden wir in vorliegender Arbeit jedoch nicht beschreiten.

4.3. Der Bias des MLS

Als weitere Anwendung von Proposition 4.4 erhalten wir eine Formel für den (nicht-asymptotischen) Erwartungswert und somit den Bias des MLS. Die folgende Proposition verallgemeinert [GT14, Proposition 1], wo der Fall $x = y = 0$ behandelt wird.

Proposition 4.8. *Sei X eine α -skalierte Brownsche Brücke zwischen x und y . Für $u \in \mathbb{R}$ und $T \in (0, 1)$ seien*

$$\begin{aligned} S_T(u) &:= \sinh(u \log(1-T)), & C_T(u) &:= \cosh(u \log(1-T)), \\ H_T &:= \log \frac{1}{1-T} + (x-y)^2. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathbf{E}[\hat{\alpha}_T(X)] = \frac{1}{2} \left[\exp\left(\frac{2\alpha-1}{4} H_T\right) \left(H_T I_{\alpha, T}^{(1)} + I_{\alpha, T}^{(2)}\right) + 1 \right], \quad (70)$$

wobei

$$I_{\alpha,T}^{(1)} = \int_{|\alpha-\frac{1}{2}|}^{\infty} \frac{u \exp\left(\frac{(x-y)^2}{2} \cdot \frac{uS_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2}C_T(u)}{C_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2u}S_T(u)}\right)}{\sqrt{C_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2u}S_T(u)}} du,$$

$$I_{\alpha,T}^{(2)} = \int_{|\alpha-\frac{1}{2}|}^{\infty} \left[\exp\left(\frac{(x-y)^2}{2} \cdot \frac{uS_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2}C_T(u)}{C_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2u}S_T(u)}\right) \cdot \frac{S_T(u) \left(C_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2u}S_T(u)\right) - u(x-y)^2}{\left(C_T(u) + \frac{1-2\alpha}{2u}S_T(u)\right)^{5/2}} \right] du.$$

Obige Formel für den Erwartungswert des MLS ist sehr kompliziert und daher schwer interpretierbar. Wir können allerdings die auftretenden Integrale numerisch berechnen. In Abbildung 3 ist der Bias des MLS, d.h. $\mathbf{E}[\hat{\alpha}_T(X)] - \alpha$ für eine α -skalierte Brownsche Brücke X , für $T = 0.9$ und verschiedene Werte von $|x - y|$ als Funktion von α aufgetragen. Wie bereits von Görgens und Thulin [GT14] bemerkt, ist für $x = y = 0$ der Bias des MLS beträchtlich. Besonders für kleine Werte von α ist der mittlere relative Schätzfehler sehr groß. Allerdings zeigt die Abbildung, dass, gemessen am Bias, der MLS mit wachsendem Abstand von x und y deutlich besser wird. Für $|x - y| = 10$ beispielsweise ist der MLS bereits beinahe unverzerrt. Für andere Werte von T folgt der Bias einem ähnlichen Muster. Der Bias als Funktion von T ist beispielhaft für den Fall $\alpha = 1$ in Abbildung 4 dargestellt. Wie man sieht, fällt der Bias für kleinere Werte von $|x - y|$ über den gesamten Zeitverlauf stark ab. Für größere Werte von $|x - y|$ hingegen ist der Bias zunächst sogar leicht wachsend und fällt erst in unmittelbarer Nähe von $T = 1$ ab.

Wir kommen nun zum Beweis von Proposition 4.8. Den Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformation aus Proposition 4.4 und dem Erwartungswert des MLS stellt das folgende Lemma her.

Lemma 4.9 (siehe z.B. [CDFP81]). *Seien Y und Z Zufallsvariablen mit $Y \geq 0$, $Z > 0$ f.s. Sei $\psi(s, t) = \mathbf{E}[e^{-sY-tZ}]$ für $s, t \geq 0$ deren gemeinsame Laplace-Transformation. Dann gilt für $j \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{E}\left[\frac{Y^j}{Z^k}\right] = \frac{(-1)^j}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} \lim_{s \searrow 0} \frac{\partial^j}{\partial s^j} \psi(s, t) dt.$$

Beweisskizze. Es gilt

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{\partial^j}{\partial s^j} \psi(s, t) = (-1)^j \lim_{s \searrow 0} \mathbf{E}[Y^j e^{-sY-tZ}] = (-1)^j \mathbf{E}[Y^j e^{-tZ}],$$

dabei folgen der erste Schritt aus dem Differentiationslemma (siehe z.B. S. 145-146 in [Kle13]) und der zweite Schritt aus monotoner Konvergenz. Mit vollständiger Induktion und partieller Integration erhält man weiter für $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ die Formel

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^k}.$$

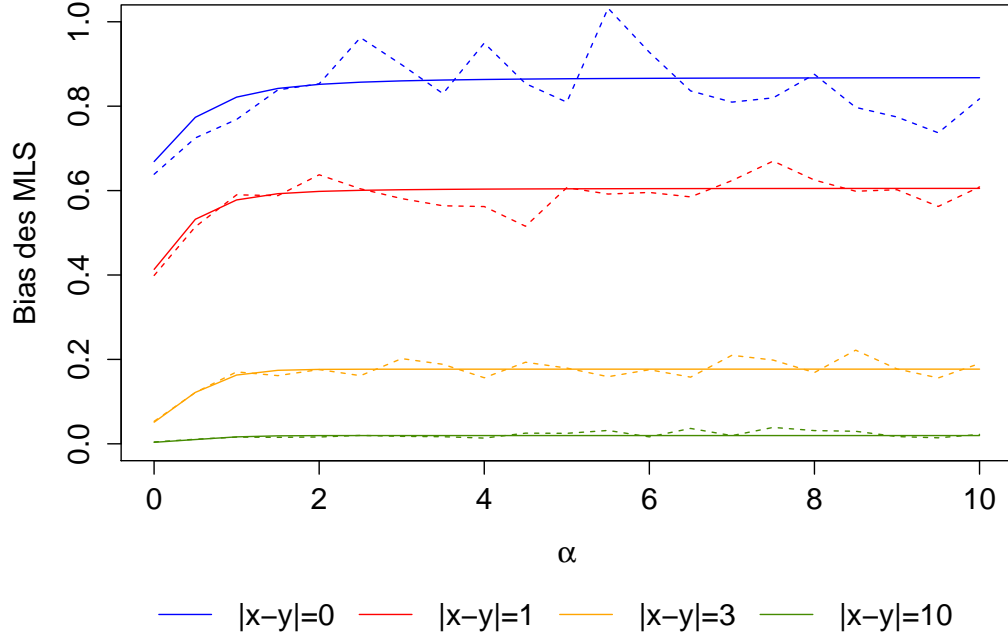


Abbildung 3: Bias des MLS für $T = 0.9$ als Funktion von α . Durchgehende Linien beziehen sich auf den theoretischen Bias gemäß Proposition 4.8. Gestrichelte Linien beziehen sich auf das arithmetische Mittel von 2000 Simulationen von $\hat{\alpha}_{0.9}$, berechnet für $\alpha \in \{0.001, 0.5, 1.0, 1.5, \dots, 9.5, 10\}$. Dazu wurden α -skalierte Brownsche Brücken mit dem Eulerverfahren (Schrittweite 10^{-4}) auf $[0, 0.9]$ erzeugt und das Integral in (64) mittels Trapezregel (361 Stützstellen) approximativ berechnet.

Da der Integrand positiv ist, gilt schließlich mit dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^t t^{k-1} \mathbf{E} [Y^j e^{-tZ}] dt = \mathbf{E} \left[\frac{Y^j}{(k-1)!} \int_0^t t^{k-1} e^{-tZ} dt \right] = \mathbf{E} \left[\frac{Y^j}{Z^k} \right].$$

□

Beweis von Proposition 4.8. Wir betrachten die Darstellung (64) des MLS. Offensichtlich gilt

$$\mathbf{E}[\hat{\alpha}_T(X)] = \frac{1}{2} \left(H_T \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right)^{-1} \right] - \frac{1}{1-T} \mathbf{E} \left[\frac{(y - X_T)^2}{\int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds} \right] + 1 \right)$$

und es bleibt die beiden Erwartungswerte unter Verwendung von Lemma 4.9 zu berechnen. Wir verwenden weiterhin die Abkürzung $F(\mu; \alpha) = \sqrt{2\mu + (\alpha - \frac{1}{2})^2}$. Einerseits

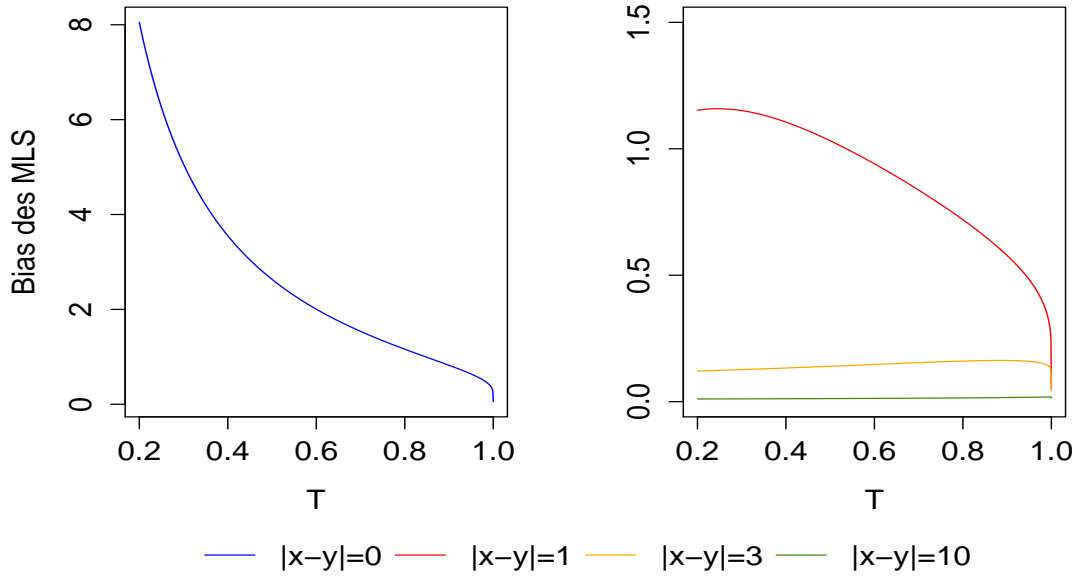


Abbildung 4: Bias des MLS für $\alpha = 1$ als Funktion von T . Man beachte die verschiedenen Skalen auf den beiden y -Achsen.

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[\left(\int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds \right)^{-1} \right] &= \int_0^\infty \lim_{\nu \searrow 0} \psi_T(\mu, \nu; \alpha) d\mu \\
&= \exp \left(\frac{2\alpha - 1}{4} H_T \right) \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{c_T(\mu, \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha)}} \right. \\
&\quad \cdot \exp \left(\frac{(x-y)^2}{2} \cdot \frac{F(\mu; \alpha) s_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2} c_T(\mu; \alpha)}{c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha)} \right) \Big] d\mu \\
&= \exp \left(\frac{2\alpha - 1}{4} H_T \right) \int_{|\alpha - \frac{1}{2}|}^\infty \left[\frac{u}{\sqrt{\cosh(u \log(1-T)) + \frac{1-2\alpha}{2u} \sinh(u \log(1-T))}} \right. \\
&\quad \cdot \exp \left(\frac{(x-y)^2}{2} \cdot \frac{u \sinh(u \log(1-T)) + \frac{1-2\alpha}{2} \cosh(u \log(1-T))}{\cosh(u \log(1-T)) + \frac{1-2\alpha}{2u} \sinh(u \log(1-T))} \right) \Big] du,
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $u = F(\mu; \alpha)$ verwendet haben. Zum anderen gilt

$$\mathbf{E} \left[\frac{(y - X_T)^2}{\int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds} \right] = - \int_0^\infty \lim_{\nu \searrow 0} \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_T(\mu, \nu; \alpha) d\mu.$$

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{F(\mu; \alpha) s_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2} c_T(\mu, \alpha)}{c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha)} \right] \\
&= \frac{-2(1-T) c_T(\mu; \alpha) \left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)}{\left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)^2} \\
&\quad - \frac{\frac{2(1-T)}{F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \left(F(\mu; \alpha) s_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2} c_T(\mu, \alpha) \right)}{\left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)^2} \\
&= \frac{-2(1-T)}{\left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)^2},
\end{aligned}$$

wobei wir $\cosh^2 - \sinh^2 \equiv 1$ verwendet haben. Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{\sqrt{c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha)}} \right] = \frac{\frac{s_T(\mu; \alpha)}{F(\mu; \alpha)} (1-T)}{\left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha-4\nu(1-T)}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)^{3/2}}.$$

Mit der Formel $\frac{d}{d\nu} f(\nu) e^{g(\nu)} = (f'(\nu) + g'(\nu) f(\nu)) e^{g(\nu)}$ für differenzierbare Funktionen f und g sowie $\nu \searrow 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[\frac{(y - X_T)^2}{\int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds} \right] \\
&= -\exp \left(\frac{2\alpha - 1}{4} H_T \right) \\
&\quad \cdot \int_0^\infty \exp \left(\frac{(x - y)^2}{2} \cdot \frac{F(\mu; \alpha) s_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2} c_T(\mu; \alpha)}{c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha)} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\frac{s_T(\mu; \alpha)}{F(\mu; \alpha)} (1-T)}{\left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)^{3/2}} - \frac{(x - y)^2 (1-T)}{\left(c_T(\mu; \alpha) + \frac{1-2\alpha}{2F(\mu; \alpha)} s_T(\mu; \alpha) \right)^{5/2}} \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Durch erneute Substitution $u = F(\mu; \alpha)$ erhalten wir daraus schließlich

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[\frac{(y - X_T)^2}{\int_0^T \frac{(y - X_s)^2}{(1-s)^2} ds} \right] \\
&= -\exp\left(\frac{2\alpha - 1}{4} H_T\right) (1 - T) \\
&\quad \cdot \int_{|\alpha - \frac{1}{2}|}^{\infty} \exp\left(\frac{(x - y)^2}{2} \cdot \frac{u \sinh(u \log(1 - T)) + \frac{1-2\alpha}{2} \cosh(u \log(1 - T))}{\cosh(u \log(1 - T)) + \frac{1-2\alpha}{2u} \sinh(u \log(1 - T))}\right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{\sinh(u \log(1 - T))}{\left(\cosh(u \log(1 - T)) + \frac{1-2\alpha}{2u} \sinh(u \log(1 - T))\right)^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{u(x - y)^2}{\left(\cosh(u \log(1 - T)) + \frac{1-2\alpha}{2u} \sinh(u \log(1 - T))\right)^{5/2}} \right) du,
\end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □

4.4. Ausblick

Die Ergebnisse dieses Abschnittes stellen einen ersten Schritt dar, im Falle $x = y = 0$ existierende Resultate über den MLS des Parameters α auf allgemeine $x, y \in \mathbb{R}$ zu erweitern. Wie bereits erwähnt, könnte in einem nächsten Schritt versucht werden, die asymptotische Verteilung des MLS für $T \nearrow 1$ zu bestimmen. Wir haben bisher die Parameter x und y stets als bekannt vorausgesetzt. Weitere Fragestellungen könnten die gleichzeitige Schätzung von α und y oder die Schätzung von einem der beiden Parameter, wenn beide unbekannt sind, betreffen. Da bereits zur Zeit $t = 0$ die volle Information über den Parameter x vorliegt, wäre es dabei sinnvoll, diesen weiterhin als bekannt anzunehmen.

Anhang

A. Funktionen von endlicher Variation

Definition A.1. Eine Funktion $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *von endlicher Variation auf* $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, falls

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| \mid a \leq t_0 < \dots < t_n \leq b, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

F heißt *von endlicher Variation*, wenn sie auf allen Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ von endlicher Variation ist.

B. Dynkinscher π - λ -Satz

Definition B.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. \mathcal{D} heißt Dynkin-System, falls

- (i) $\Omega \in \mathcal{D}$
- (ii) $B \setminus A \in \mathcal{D}$ für alle $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subset B$
- (iii) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}$ für alle Folgen $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{D} mit $D_1 \subset D_2 \subset \dots$

Theorem B.2 (Dynkinscher π - λ -Satz). *Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System und $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ schnittstabil. Dann gilt $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$.*

Beweis. Für einen Beweis siehe z.B. [Kle13, S. 7]. □

Literatur

- [BP10a] BARCZY, Mátyás ; PAP, Gyula: α -Wiener bridges: singularity of induced measures and sample path properties. In: *Stochastic Anal. Appl.* 28 (2010), Nr. 3, S. 447–466
- [BP10b] BARCZY, Mátyás ; PAP, Gyula: Asymptotic behavior of maximum likelihood estimator for time inhomogeneous diffusion processes. In: *J. Stat. Plann. Inference* 140 (2010), Nr. 6, S. 1576–1593
- [BS90] BRENNAN, M. J. ; SCHWARTZ, E.S.: Arbitrage in stock index futures. In: *The Journal of Business* 63 (1990), S. 7–31
- [CDFP81] CRESSIE, Noel ; DAVIS, Anne S. ; FOLKS, J. L. ; POLICELLO, George E.: The moment-generating function and negative integer moments. In: *Am. Stat.* 35 (1981), S. 148–150
- [Cla91] CLARK, J. M. C.: A local characterization of reciprocal diffusions. 1991, S. 45–59
- [CU11] CHAUMONT, Loïc ; URIBE BRAVO, Gerónimo: Markovian bridges: weak continuity and pathwise constructions. In: *Ann. Probab.* 39 (2011), Nr. 2, S. 609–647
- [CW90] CHUNG, Kai L. ; WILLIAMS, Ruth: *Introduction to Stochastic Integration*. 2nd ed. Berlin Heidelberg : Springer Science and Business Media, 1990
- [Dec05] DECK, Thomas: *Der Itô-Kalkül - Einführung und Anwendungen*. Berlin Heidelberg : Springer, 2005
- [Doo53] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*. New York : Wiley, 1953
- [Dur96] DURRETT, Richard: *Stochastic Calculus - A Practical Introduction*. 2. Aufl. Boca Raton, Florida : CRC Press, 1996
- [FPY92] FITZSIMMONS, Pat ; PITMAN, Jim ; YOR, Marc: Markovian bridges: Construction, Palm interpretation, and splicing. In: *Seminar on stochastic processes, 1992. Held at the Univ. of Washington, DC, USA, March 26-28, 1992*. Basel : Birkhäuser, 1992, S. 101–134
- [Gö14] GÖRGENS, Maik: Inference in α -Brownian bridge based on Karhunen-Loève expansions. (2014). – arXiv:1401.2326
- [GT14] GÖRGENS, Maik ; THULIN, Måns: Bias-correction of the maximum likelihood estimator for the α -Brownian bridge. In: *Stat. Probab. Lett.* 93 (2014), S. 78–86

- [Gub16] GUBINELLI, Massimiliano: *Stochastic Analysis - Course note 2*. Vorlesungsskript, Universität Bonn, 2016. – Online erhältlich unter https://www.iam.uni-bonn.de/fileadmin/user_upload/gubinelli/stochastic-analysis-ss16/sa-note-2.pdf; abgerufen am 7.8.2016.
- [Jam75] JAMISON, Benton: The Markov processes of Schrödinger. In: *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* 32 (1975), S. 323–331
- [Kle13] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 3. Aufl. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2013
- [KS91] KARATZAS, Ioannis ; SHREVE, Steven E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd Corrected ed. 1998. Corr. 6th printing 2004. Berlin Heidelberg : Springer Science and Business Media, 1991
- [Lé78] LÉPINGLE, D.: Sur le comportement asymptotique des martingales locales. *Semin. Probab. XII, Univ. Strasbourg 1976/77, Lect. Notes Math.* 649, 1978, S. 148–161
- [LSA01] LIPTSER, Robert ; SHIRYAEV, Albert N. ; ARIES, B.: *Statistics of Random Processes - I. General Theory*. 2nd rev. and exp. ed. Berlin Heidelberg : Springer Science and Business Media, 2001
- [Man04] MANSUY, Roger: On a one-parameter generalization of the Brownian bridge and associated quadratic functionals. In: *J. Theor. Probab.* 17 (2004), Nr. 4, S. 1021–1029
- [Mui82] MUIRHEAD, Robb J.: *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York : Wiley, 1982
- [Nev68] NEVEU, Jacques: *Processus aléatoires gaussiens - séminaire de math. supérieure, été 1968*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1968
- [Nov72] NOVIKOV, A. A.: On an identity for stochastic integrals. In: *Theory Probab. Appl.* 17 (1972), S. 717–720
- [Øks03] ØKSENDAL, Bernt: *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*. 6th ed. Berlin Heidelberg : Springer Science and Business Media, 2003
- [RW00] ROGERS, L. C. G. ; WILLIAMS, David: *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Volume 2, Itô Calculus*. 2. Auflage. Cambridge : Cambridge University Press, 2000
- [RY94] REVUZ, Daniel ; YOR, Marc: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 2nd ed. Berlin Heidelberg : Springer, 1994

- [Thi02] THIEULLEN, Michèle: Reciprocal diffusions and symmetries of parabolic PDE: the nonflat case. In: *Potential Anal.* 16 (2002), Nr. 1, S. 1–28
- [Wen08] WENGENROTH, Jochen: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin : Walter de Gruyter, 2008

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel genutzt habe.

Potsdam, den 29. November 2016

Florian Hildebrandt