Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 4 **Abgabe 17.11.2015**

(1) Sei (X, m) ein endlicher Maßraum und sei $\|\cdot\|$ die Norm von $\ell^2(X, m)$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|Af\| \mid f \in \ell^2(X,m) \text{ with } \|f\| = 1\}$$
eine Norm auf dem Vektorraum der Operatoren auf $\ell^2(X, m)$ definiert. Wir nennen $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm.

(b) Zeigen Sie $\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$

(c) Sei (b, c) ein Graph über (X, m) und sei $L_{b,c,m}$ der assoziierte Operator. Zeigen Sie
$$\|L_{b,c,m}\|_{\mathrm{op}} \leq 2 \sup_{x\in X} \mathrm{Deg}(x)$$
wobei $\mathrm{Deg}(x) = \frac{1}{m(x)}(\sum_y b(x, y) + c(x))$, $x \in X$.

(2) Sei (X, m) ein endlicher Maßraum und sei L ein selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(X, m)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Summe
$$e^{-tL} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-tL)^n$$
bezüglich der Operator Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ für alle $t \geq 0$ absolut konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $\varphi_t = e^{-tL}f$ for $f \in \ell^2(X, m)$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung
$$\frac{d}{dt}\varphi_t = -L\varphi_t, \quad \varphi_0 = f,$$
für alle $t \geq 0$.

(3) Seien A und B Operatoren auf $\ell^2(X, m)$ so dass $AB = BA$. Zeigen Sie
$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

(4) Sei (X, m) ein endlicher Maßraum und sei L ein selbstadjungierter Operator auf $\ell^2(X, m)$ und sei $\sigma(L)$ die Menge der Eigenwerte von L. Für $\lambda \in \sigma(L)$ sei $E_\lambda$die orthogonale Projektion auf den Eigenraum von λ. Zeigen Sie

(a) $E_\lambda E_\mu = 0$ if $\lambda \neq \mu$.

(b) $\sum_{\lambda\in\sigma(L)} E_\lambda = I$.

(c) $\sum_{\lambda\in\sigma(L)} \lambda E_\lambda = L$.