Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 2 **Abgabe 27.10.2015**

(1) Sei $\mathbb{Z}_n$ die zyklische Gruppe mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen, d.h. die Zahlen $\{0, \ldots, n-1\}$ mit Addition modulo n. Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$X = \mathbb{Z}_n^k = \underbrace{\mathbb{Z}_n \times \ldots \times \mathbb{Z}_n}_{k \text{ mal}}$$

Sei $(b, c) = (b_{n,k}, c_{n,k})$ der *k-dimensionale zyklische Graph* über X mit Standardgewichten, d.h. $c \equiv 0$, $b(x, y) = 1$ falls $|x - y| = 1$, (wobei $|x - y| := \sum_{j=1}^{k}(|x_j - y_j| \wedge (n - |x_j - y_j|))$ und $b(x, y) = 0$, sonst. Wählen Sie zwei Ihrer Lieblingszahlen $n \in N$, $n \geq 2$. Geben Sie für diese Zahlen n und $k = 1, 2$, die Matrix $l_{b_{n,k},c_{n,k}}$, die Wirkung des Laplaceoperators $L_{b_{n,k},c_{n,k}}$ an und skizzieren Sie jeweils den Graph.

(2) Sei V ein reeller Vektorraum und Q, Q' zwei symmetrische bilineare Formen auf V. Zeigen Sie, dass falls

$$Q(f, f) = Q'(f, f), \quad f \in V,$$

gilt, dann folgt

$$Q(f, g) = Q'(f, g), \quad f, g \in V.$$

(3) Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ normale Kontraktionen sind

- $a \mapsto a \vee 0$.
- $a \mapsto (-a) \vee 0$.
- $a \mapsto a \wedge 1$.
- $C_{[0,1]} : a \mapsto 0 \vee (a \wedge 1)$.

(4) Sei Q eine bilineare Form auf $C(X)$ für eine endliche Menge X. Zeigen Sie, dass falls

$$Q(f \wedge 1) \leq Q(f), \quad f \in C(X)$$

gilt, dann auch für alle normalen Kontraktionen C folgt

$$Q(Cf) \leq Q(f), \quad f \in C(X).$$