Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 7

28. Zeigen Sie, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Hinweis: Konstruieren Sie mit dem Lemma von Zorn eine maximale linear unabhängige Menge.

29. Es sei $\mathscr{B}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Die linearen Abbildungen $f_b\colon X \to \mathbb{K}$ mit $x = \sum_{b\in\mathscr{B}} f_b(x)$ heißen *Koeffizientenabbildungen*. Geben Sie eine Beispiel eines unendlich dimensionalen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums X mit einer Basis $\mathscr{B} \subseteq X$, so dass alle Koeffizientenabbildungen stetig sind.

30. Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ derart, dass $A + B$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

31. Es sei X ein topologischer Vektorraum und $Y \subseteq X$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass Y und $\overline{Y}$ bzgl. der Spurtopologie topologische Vektorräume sind.

32. Entscheiden Sie, ob die Skalarmultiplikation und/oder Addition auf $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Topologie stetig sind, die durch die folgende "französische Eisenbahnmetrik" erzeugt wird: Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei

$$d(x,y) := \begin{cases} |x-y| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ linear abhängig sind} \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

33. Es sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Menge $K_{\mathscr{T}} := \bigcap_{U\in\mathscr{U}(0)} U$ heißt *Kern* von $\mathscr{T}$. Zeigen Sie:

(a) $K_{\mathscr{T}}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $K_{\mathscr{T}} = \{0\}$.

(ii) $(X, \mathscr{T})$ ist ein Hausdorffraum.

(iii) $\{0\}$ ist abgeschlossen.