# Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 12

**50.** Es sei $\langle X, Y\rangle$ ein duales Paar und $\mathfrak{S}$ eine Familie von $\sigma(Y,X)$-beschränkten Teilmengen von $Y$. Zeigen Sie, dass sich die $\mathfrak{S}$-Topologie auf $X$ nicht ändert, wenn wir $\mathfrak{S}$ durch folgende Teilmengen von $Y$ ersetzen:

(a) Alle endlichen Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathfrak{S}$.

(b) Alle Teilmengen von Mengen aus $\mathfrak{S}$.

(c) Die Mengen $\lambda B$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $B \in \mathfrak{S}$.

(d) Die $\sigma(Y,X)$-Abschlüsse aller Mengen aus $\mathfrak{S}$.

(e) Die $\sigma(Y,X)$-abgeschlossene kreisförmige konvexe Hüllen aller Mengen aus $\mathfrak{S}$.

**51.** Es sei $\langle X, Y\rangle$ ein duales Paar. Zeigen Sie, dass eine $\mathfrak{S}$-Topologie auf $X$ genau dann Hausdorff'sch ist wenn $\operatorname{span}\bigcup\mathfrak{S}$ $\sigma(Y,X)$-dicht in $Y$ ist.

**52.** Es sei $\Omega$ eine Menge und $\mathscr{F}(\Omega)$ der Vektorraum aller Funktionen von $\Omega$ nach $\mathbb{K}$ versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz $\mathscr{T}$.

(a) Geben Sie eine Familie $\mathfrak{S}$ von konvexen und kreisförmigen Teilmengen des algebraischen Duals von $\mathscr{F}(\Omega)$ an, so dass $\mathscr{T}$ gerade die $\mathfrak{S}$-Topologie ist.

(b) Geben Sie (möglichst explizit) die feinste lokal konvexe Topologie auf $\mathscr{F}(\Omega)$ an, für die jedes stetige Funktional $\varphi \in \mathscr{F}(\Omega)'$ von der Form $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{\omega_k}$ für gewisse $\lambda_k \in \mathbb{K}$ und $\omega_k \in \Omega$ ist. $(\star)$

**53.** Es sei $X$ ein normierter Raum mit $\dim X = \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein Netz $(x_\alpha) \subseteq X$ gibt mit $\sigma(X,X^*)\text{-}\lim x_\alpha = 0$ und

$$\sup\{\|x_\beta\| : \beta \geq \alpha\} = \infty$$

für alle $\alpha$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ $\sigma(X,X^*)$-dicht in $B_X$ liegt.

**Hinweis:** Verwenden Sie als Indexmenge alle endlichen Teilmengen von $X^*$ und orientieren Sie sich am Beweis des Satzes 6.1.1 aus der Vorlesung.