Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 10

42. Es sei M eine absorbierende, kreisförmige und konvexe Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Zeigen Sie, dass eine Halbnorm $p\colon X \to [0,\infty)$ genau dann die Eichfunktion von $M \subseteq X$ ist, wenn $M_0 \subseteq M \subseteq M_1$ für $M_0 := \{x \in X : p(x) < 1\}$ und $M_1 := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$.

43. Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset X$. Wir definieren

$$C := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ x_j \in M,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

und

$$D := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : \lambda_j \in \mathbb{K},\ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq 1,\ x_j \in M,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $C \subseteq \operatorname{conv} M$

Hinweis: Induktion über n.

(b) $\operatorname{conv} M = C$

(c) D ist die kreisförmige konvexe Hülle von M.

44. Wir betrachten auf $C^\infty(\mathbb{R})$, dem Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon R \to \mathbb{R}$, die von allen Halbnormen der Form $p_{K,m} := \sup_{x\in K} |f^{(m)}(x)|$ für $K \subseteq \Omega$ kompakt und $m \in \mathbb{N}_0$ erzeugte lokal konvexe Topologie. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen zutreffen:

(a) Die Topologie ist metrisierbar.

(b) Die Topologie ist normierbar.

(c) Die Ableitung $f \mapsto f'$ ist stetig als Funktion von $C^\infty(\mathbb{R})$ nach $C^\infty(\mathbb{R})$.

(d) Die Abbildung $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, die jedem $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ die eindeutige Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ zuordnet, ist stetig.

45. Zeigen Sie:

(a) Für jede Indexmenge $J \neq \emptyset$ ist $\mathbb{R}^J$ ein vollständiger lokal konvexer Vektorraum.

(b) Ist J unendlich, so ist $\mathbb{R}^J$ nicht normierbar.