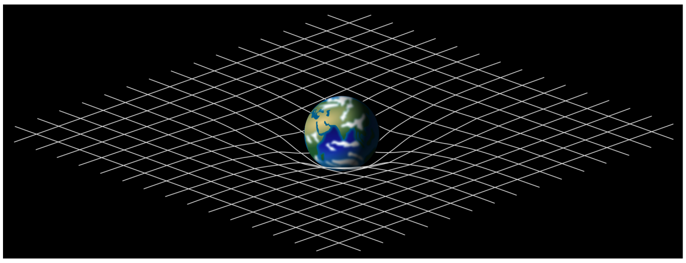
# Blockseminar 2021
# Das Positive-Masse-Theorem

Christian Bär und Bernhard Hanke





## Wann:

Anreise ist am Sonntag, dem 18. Juli zum Abendessen um 18:00 Uhr. Im Anschluss findet der Einführungsvortrag statt. Die Abreise ist am Freitag, dem 23. Juli, nach dem Mittagessen.

## Wo:

Das Blockseminar wird im Hotel Bollmannsruh im Havelland veranstaltet. Für Details siehe `http://www.hotel-bollmannsruh.de`.

## Was:

Das Positive-Masse-Theorem (PMT) aus der allgemeinen Relativitätstheorie postuliert die Positivität der Gesamtmasse eines isolierten Gravitationssystems mit nicht-negativer, von Null verschiedener lokaler Massedichte. In der Sprache der riemannschen Geometrie entspricht dies einer nicht-trivialen Aussage über die globale Geometrie von vollständigen, asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit mit nicht-negativer Skalarkrümmung.

Insbesondere stellt sich heraus, dass jede vollständige riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die nicht-negative Skalarkrümmung besitzt und außerhalb eines Kompaktums flach ist, bereits isometrisch zur Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Wir diskutieren dieses fundamentale Resultat aus verschiedenen Blickwinkeln. Ein Beweis geht auf Witten [10] zurück und löst ein Randwertproblem für Diracoperatoren auf Spin-Mannigfaltigkeiten. Alternativ kann man sich mit einem Trick von Lohkamp auf kompakte Mannigfaltigkeiten zurückziehen. In Dimensionen $\leq 7$ ist es dann nach Schoen und Yau [7] möglich, den Satz durch die Betrachtung minimaler Hyperflächen auch im Nichtspinfall zu beweisen. Im Spinfall erhalten wir einen dritten Beweis indem wir ältere Resulate von Gromov und Lawson heranziehen. Neuere, noch unpublizierte Resultate deuten darauf hin, dass das PMT in allen Dimensionen auch im Nichtspinfall gilt, siehe [8] und den Überblick [4].

## Wie:

Die Vorträge sollten eine Dauer von 60 Minuten (plus Zeit für Diskussion) nicht überschreiten. Diese Zeitvorgabe bitte einhalten und bei der Planung der Vorträge berücksichtigen. Für den Notfall sollte man schon bei der Planung Passagen vorsehen, die wegfallen können, ohne dass der restliche Vortrag darunter allzu sehr leidet.

Aus Ermangelung einer Tafel werden die Vorträge mit zwei Dokumentenkameras und angeschlossenen Beamern gehalten. Wichtig ist dabei, dass die Blätter nicht vorbereitet mitgebracht werden, sondern - wie an einer Tafel - während des Vortrags live beschrieben werden.

## Wer:

Um sinnvoll teilnehmen zu können, muss man über Kenntnisse der riemannschen Geometrie und der Spin-Geometrie verfügen. Die benötigten Hilfsmittel aus der geometrischen Maßtheorie für den Hyperflächenbeweis werden im Seminar erarbeitet.

Die Finanzierung erfolgt durch das Schwerpunktprogramm „Geometrie im Unendlichen“. Die Teilnahme ist nur für den gesamten Zeitraum des Seminars möglich.

## Vortragsprogramm:

(0.) Einführung *(Christian Bär)*: Darstellung des Themas und Überblick

(1.) Asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten *(NN)*:

Definition asymptotisch flacher Mannigfaltigkeiten nach [1, Abschnitt 2], Proposition 2.2 in [1] erläutern inklusive der verwendeten Notation (z.B. gewichtete Sobolevräume), der Beweis kann aus Zeitgründen nicht ausgeführt werden, Corollar 2.3 in [1] mit Beweis.

(2.) Harmonische Koordinaten und "Eindeutigkeit" der Koordinaten im Unendlichen *(NN)*:

Zwei Koordinatensysteme im Unendlichen einer asymtotisch flachen Mannigfaltigkeit unterscheiden sich modulo schnell abfallender Fehlerterme durch eine euklidische Bewegung. Für den Beweis werden harmonische Koordinaten konstruiert, [1, Abschnitt 3].

(3.) Wohldefiniertheit der Masse *(NN)*:

Die Masse einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit hängt nicht von den in der Definition verwendeten Koordinaten im Unendlichen ab, [1, Abschnitt 4].

(4.) Wittens Beweis für Spinmannigfaltigkeiten *(NN)*:

An Spinoren und den Diracoperator kurz erinnern und ab Gleichung (6.6) in [1] in die detaillierte Diskussion einsteigen [1, Abschnitt 6].

(5.) Einführung in minimale Hyperflächen *(NN)*:

Erinnerung an zweite Fundamentalform, mittlere Krümmung, Gaußgleichung sowie erste und zweite Variation des Volumens. Spezialfall von Graphen und Maximumsprinzip, [3, S. 15–21 oben].

(6.) Limiten von minimalen Hyperflächen *(NN)*:

Lemma vom gleichmäßigen Graphen, Existenz des Grenzwerts einer Folge von minimalen Graphen und minimaler Hyperflächen [3, S. 21–24], [5, Kap. 12].

(7.) Konformer Laplace-Operator und Yamabe-Invariante *(NN)*:

Konformer Laplace-Operator, Transformation unter konformer Änderung der Metrik, Yamabe-Invariante, Trichotomie-Lemma und Bezug zur Skalarkrümmung [3, S. 25–27 Mitte], [6, Kap. 3].

(8.) Konforme Geometrie asymtotisch flacher Mannigfaltigkeiten *(NN)*:

Existenz spezieller konformer Faktoren, Verhalten der Masse unter konformen Transformationen [3, S. 27 Mitte – 30 oben], [6, Prop. 2.10].

(9.–11.) Geometrische Maßtheorie (3 Vorträge) *(NN)*:

Ströme als Verallgemeinerung von Untermannigfaltigkeiten, Rektifizierbarkeit, minimale rektifizierbare Ströme, Federer-Fleming-Kompaktheitssatz, Plateau-Problem, regulärer und singulärer Teil eines Stroms, [3, Abschnitt 3.3], [9].

Die genaue Verteilung des Materials auf drei Vorträge erfolgt durch individuelle Absprache.

(12.) Grad einer glatten Abbildung *(NN)*:

Erinnerung an Abbildungsgrad mittels Zählen der Urbilder eines regulären Werts, Integralformel, Einschränkung auf Hyperflächen [3, Abschnitt 3.4].

(13.) Vorbereitende Vereinfachungen I *(NN)*:

Reduktion auf den Fall eines Endes, verschwindender Skalarkrümmung und konform euklidischer Metriken [3, Abschnitt 4.1].

(14.) Vorbereitende Vereinfachungen II *(NN)*:

Reduktion auf den kompakten Fall durch konforme “Einstülpung” des Endes, [3, Abschnitt 5.1].

(15.) Beweis in Dimension $n \leq 7$ *(NN)*:

Beweis per induktivem Abstieg durch Übergang zu minimalen Hyperflächen, [3, Abschnitt 5.2].

(16.) Beweis für Spinmannigfaltigkeiten à la Gromov-Lawson *(NN)*:

Definition von vergrößerbaren Mannigfaltigkeiten, Torus als Beispiel, zusammenhängende Summe von Torus und vergrößerbarer Mannigfaltigkeit (Proposition 5.6), Theorem 5.8 in [2].

## Literatur:


[1] Bartnik, R.: The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 661–693.

[2] Gromov, M.; Lawson, H. B. Jr.: Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete riemannian manifolds. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **58** (1983), 83–196 (1984).

[3] Hirscher, S.: *Some details of the proof of the Positive-Mass Theorem in higher dimensions*, Masterarbeit, 2020.

[4] Lohkamp, J.: Positive scalar curvature in dim $\geq 8$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **343** (2006), 585–588.

[5] Pérez, J.: *Minimal and Constant Mean Curvature Surfaces*, lecture notes, 2019.

[6] Schoen, R.: *Topics in scalar curvature*, lecture notes, 2017.

[7] Schoen, R.; Yau, S.-T.: On the structure of manifolds with positive scalar curvature. *Manuscripta Math.* **28** (1979), 159–183.

[8] ______: Positive Scalar Curvature and Minimal Hypersurface Singularities. *ArXiv preprint:* https://arxiv.org/abs/1704.05490 (2017).

[9] Simon, L.: *Introduction to Geometric Measure Theory*, lecture notes, 2014.

[10] Witten, E.: A new proof of the positive energy theorem. *Comm. Math. Phys.* **80** (1981), 381–402.