Thomas Jahnke

Stochastische Paradoxa als didaktische Provokationen

Vortrag im mathematikdidaktischen Kolloquium der Universität Freiburg
am 18. Mai 2010

Eine Aufgabe des Mathematikunterrichtes ist es, ein angemessenes Bild von Mathematik zu entfalten. Dass hier einiges im Argen liegt, will ich hier mit einem Zitat von Herrn Beutelspacher aus einem Interview mit der Tagesschau vom 7. November 2004 zwar nicht gerade belegen, aber doch thematisieren:

> Mathematik kommt bei den Schülern ja immer noch als ein Disziplinierungsinstrument an. In keinem anderen Fach kann der Lehrer die Klasse so gut "in den Griff" bekommen. Er sagt einfach "richtig" oder "falsch" und damit ist eine Sache erledigt. Das heißt, es muss sich etwas in den Einstellungen, in den Köpfen der Lehrer ändern. Mathematik muss mit Anwendungen, mit der Kunst, mit Umwelterfahrungen in Verbindung gebracht werden können. Die Schüler müssen auch in Mathematik selber argumentieren können. Mathematik ist ja - ganz banal gesagt - die Kunst, durch eigenes Denken etwas herauszufinden. Und dass Mathematik mit Denken zu tun hat, vielleicht sogar mit Phantasie - das ist etwas, was ich mir für den Schulunterricht wünsche.

Wir benötigen im Mathematikunterricht also auch (!) Denkanlässe, die sich weniger auf die Herleitung von Algorithmen, Formeln und zugehörige Einsetzübungen beziehen, als eben auf ‚die Kunst, durch eigenes Denken etwas herauszufinden'; Denkanlässe, bei denen das Denken der Schülerinnen und Schüler angeregt und provoziert wird. Diese Provokation kann dadurch entstehen, dass ihr natürliches Denken, auf das sie sich - nicht anders auch wir uns - routiniert verlassen, bei einem Problem fehlschlägt und in einer für sie erkennbaren Weise in die Irre führt, also bei Paradoxa, die insbesondere das Gebiet der Stochastik reichhaltig zur Verfügung stellt. Dies liegt wohl vor allem daran, dass in der Stochastik Problemstellungen modelliert werden, die auch vor einer mathematischen Behandlung und Durchdringung einen Sinn haben und insofern dem Alltagsdenken und vor- und außermathematischen Überlegungen zugänglich sind.
Der schulische Stochastikunterricht kann natürlich auch in eine Art kombinatorischer Würfelbudenmathematik ausarten, als wäre dieses Gebiet entwickelt worden, um Spielern aller Art eine wissenschaftliche Hilfestellung zu geben. Aber die mathematische Behandlung von Spielen kann sich doch auch als hilfreich erweisen, nicht etwa um professionelle Pokerspieler auszubilden, sondern um bei der Betrachtung solcher Spiele die Gedanken zu schärfen und Mathematik zu entwickeln.

Wenn man ganz grob sagt, es gibt die Mathematik und die Welt, etwas sinniger wäre schon, von Mathematik und dem Rest der Welt zu sprechen, dann gibt es wenigstens zwei Weisen, wie diese Entitäten in Beziehungen gesetzt werden können:

> Man kann zum einen Mathematik benutzen, um die Welt zu verstehen. Das nennt man Modellieren, in seiner einfachsten Form wohl auch anwenden.
>
> Man kann zum anderen die Welt benutzen, um Mathematik zu verstehen. Dies wird heute häufig mit einigem Schmäh auch als Einkleiden bezeichnet.

Aber diese abfällige Konnotation ist nur dann berechtigt, wenn der Einkleider dem Auskleider suggeriert, er erführe etwas über die Welt, was meistens nicht der Fall und auch gar nicht Sinn der Übung ist. Beim ‚Einkleiden' benutzen wir unsere lebensweltlichen Vorstellungen und unseren Verstand, um mathematische Sachverhalten und Strukturen zu verstehen. Dass ist nicht nur sinnvoll und berechtigt, sondern vermutlich – wenn man es in der Tiefe durchdenkt – können wir auch gar nicht anders mathematiklernen als durch einen Abgleich mit all unseren Vorstellungsinhalten und Gedanken. Insofern ist es auch in der Stochastik nicht nur sinnvoll sondern fast unumgänglich auch Spielsituationen heranzuziehen.

Im folgenden werde ich nun einige Paradoxa, von denen einige Ihnen sicher schon bekannt sind, darstellen, und sie jeweils mit einem didaktischen Imperativ verbinden, der natürlich nur kurz auf eine in ihnen enthaltene Dimension hinweisen kann.

Stochastische Paradoxien

Universität Freiburg
18.05.2010

Prof. Dr. Thomas Jahnke
Institut für Mathematik
Universität Potsdam

- Paradoxie
- ~~Antinomie~~

Zentrale Idee: Von der Provokation zur eignen Durchdringung

- Ein Würfelproblem
- Die Gold/Silbermünzen
- Die Hoffnung im Zug
- Die Sehne im Kreis
- Reich und reicher durch Tausch
- Gaia
- Kluger Umzug
- Das blaugrüne Unfalltaxi
- Das Simpsonsche Paradoxon
- Nicht-Transitives
- Normierung von Daten

Würfelproblem des Chevalier de Méré

Sind die Chancen für die Augensumme 11 und für die Augensumme 12 beim Wurf mit drei Würfeln gleich groß?

Würfelproblem des Chevalier de Méré

Sind die Chancen für die Augensumme 11 und für die Augensumme 12 beim Wurf mit drei Würfeln gleich groß?

10 Serien mit je 1000 Versuche

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Summe
11:	125	124	125	130	140	119	119	126	125	130	1263
12:	107	112	122	116	115	126	112	121	117	117	1163

Augensumme 11	Augensumme 12
6+4+1	6+5+1
6+3+2	6+4+2
5+5+1	6+3+3
5+4+2	5+5+2
5+3+3	5+4+3
4+4+3	4+4+4

Augensumme 11	
6+4+1	6
6+3+2	6
5+5+1	3
5+4+2	6
5+3+3	3
4+4+3	3
	27

Augensumme 12	
6+5+1	6
6+4+2	6
6+3+3	3
5+5+2	3
5+4+3	6
4+4+4	1
	25

Augensumme 11

Relative Häufigkeit

1263/10.000 = 0,1263

Wahrscheinlichkeit

p = 27/216 = 0,1250

Augensumme 12

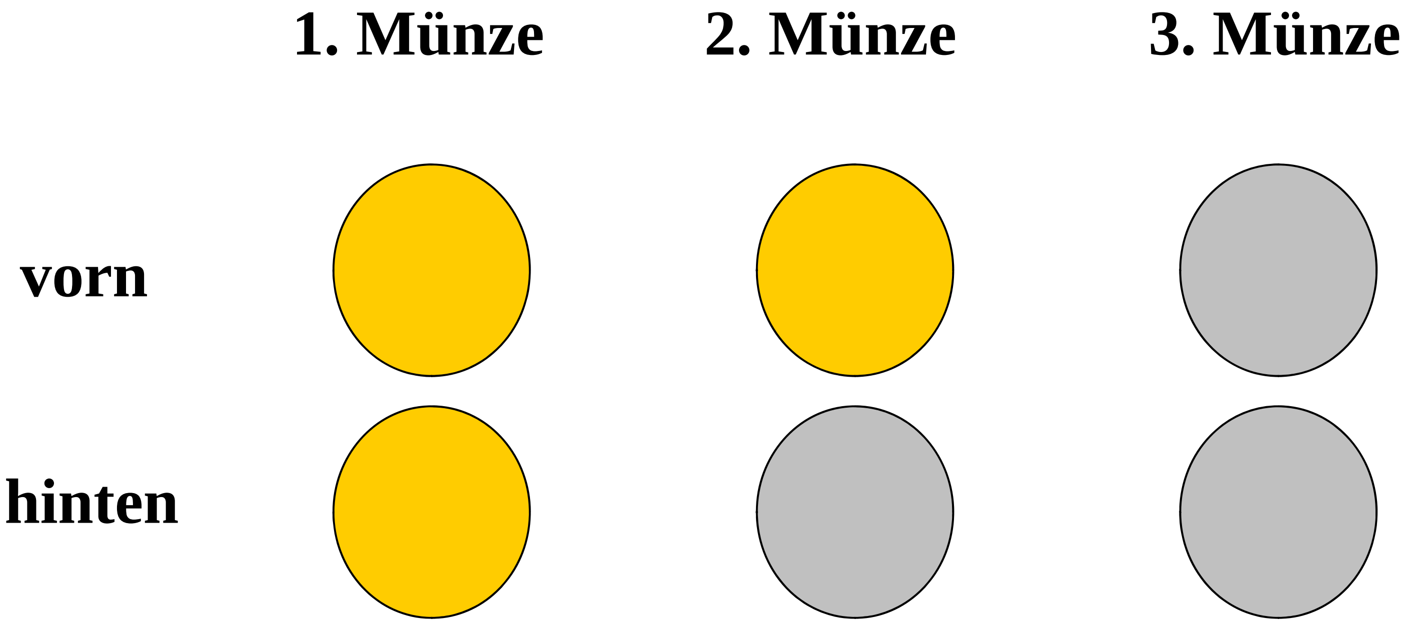
Relative Häufigkeit

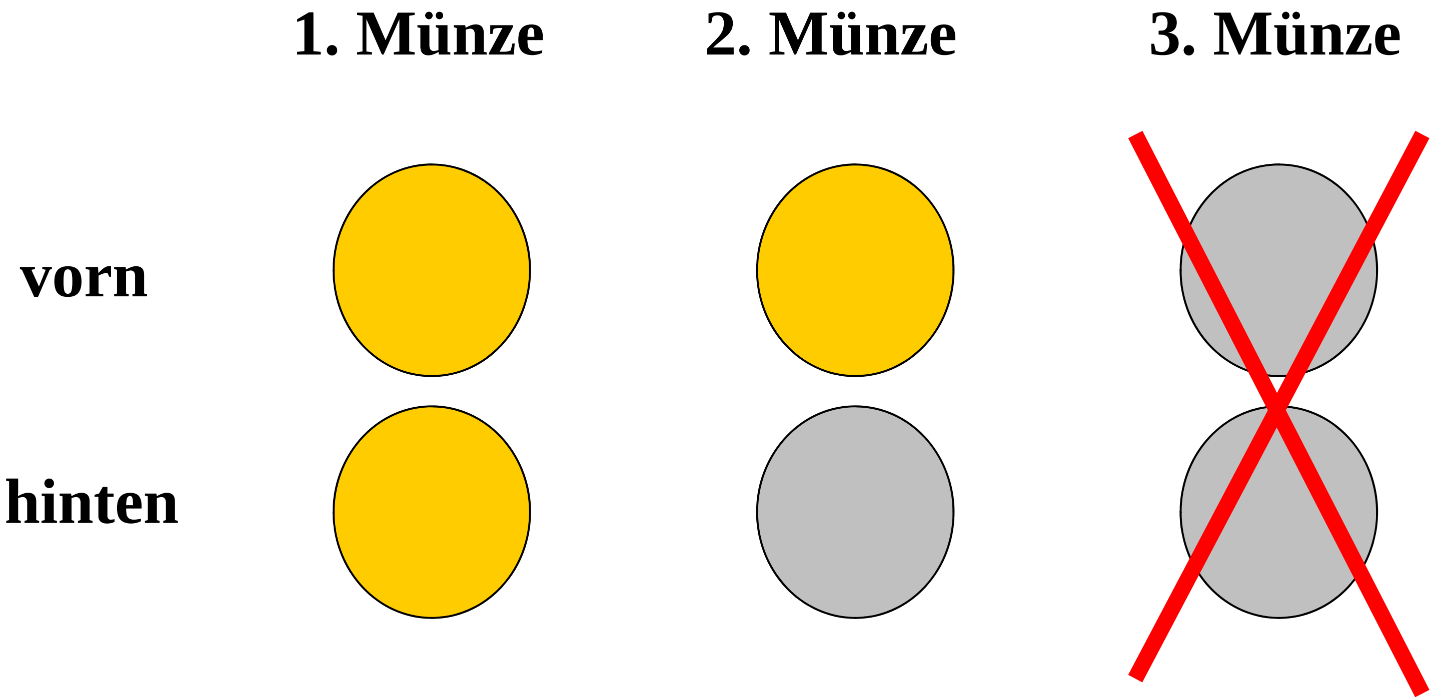
1163/10.000 = 0,1163

Wahrscheinlichkeit

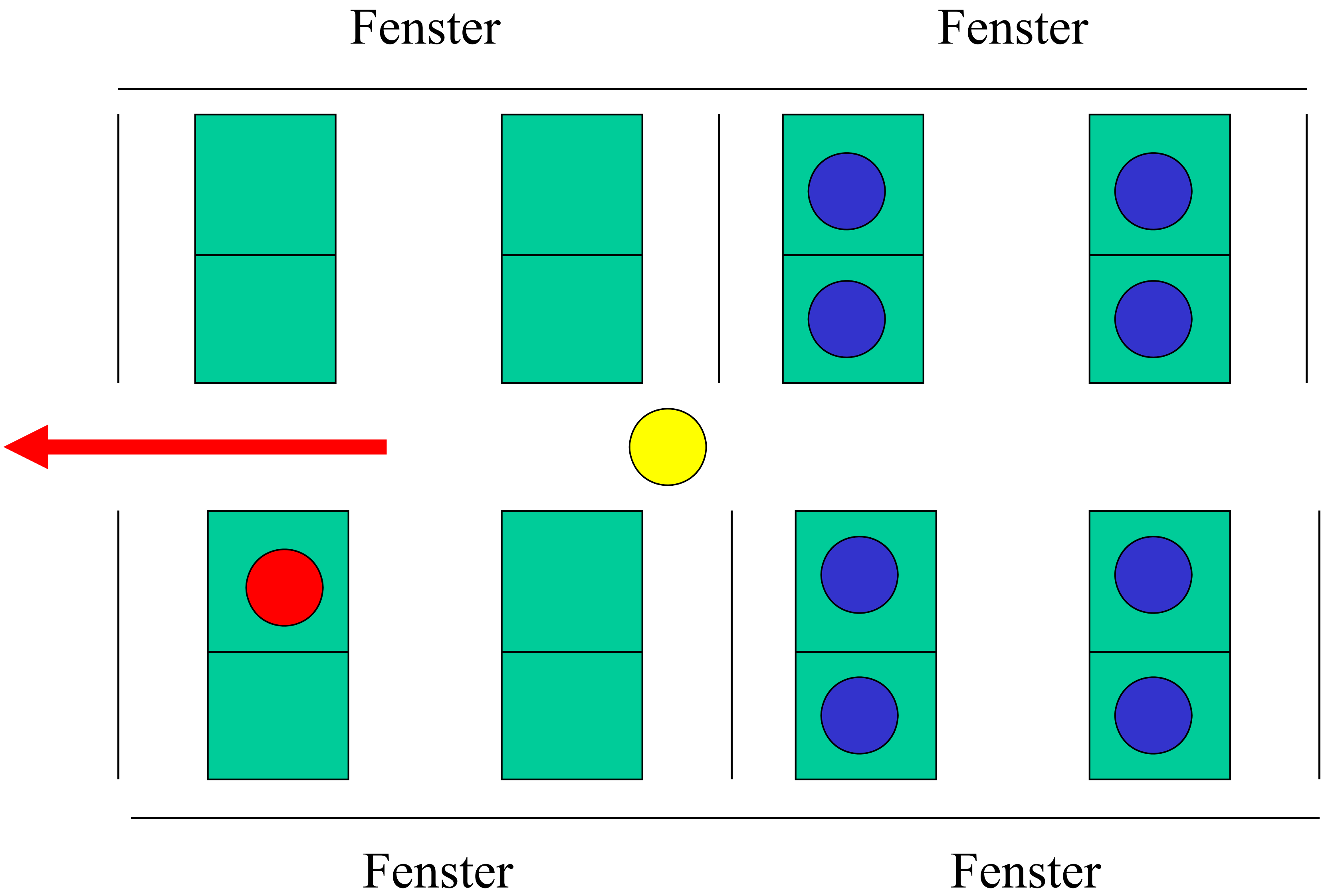
p = 25/216 = 0,1157…

Zentrale Idee: Auf Gleichverteilung untersuchen.

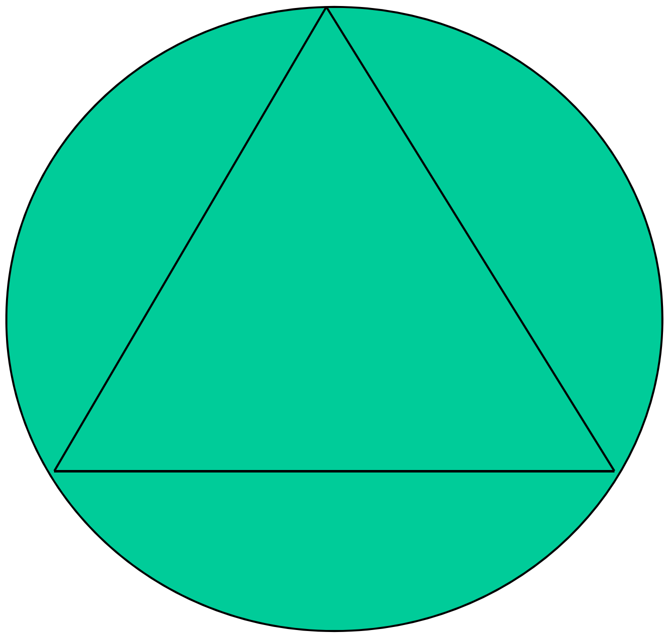

1. Münze
2. Münze
3. Münze
vorn
hinten

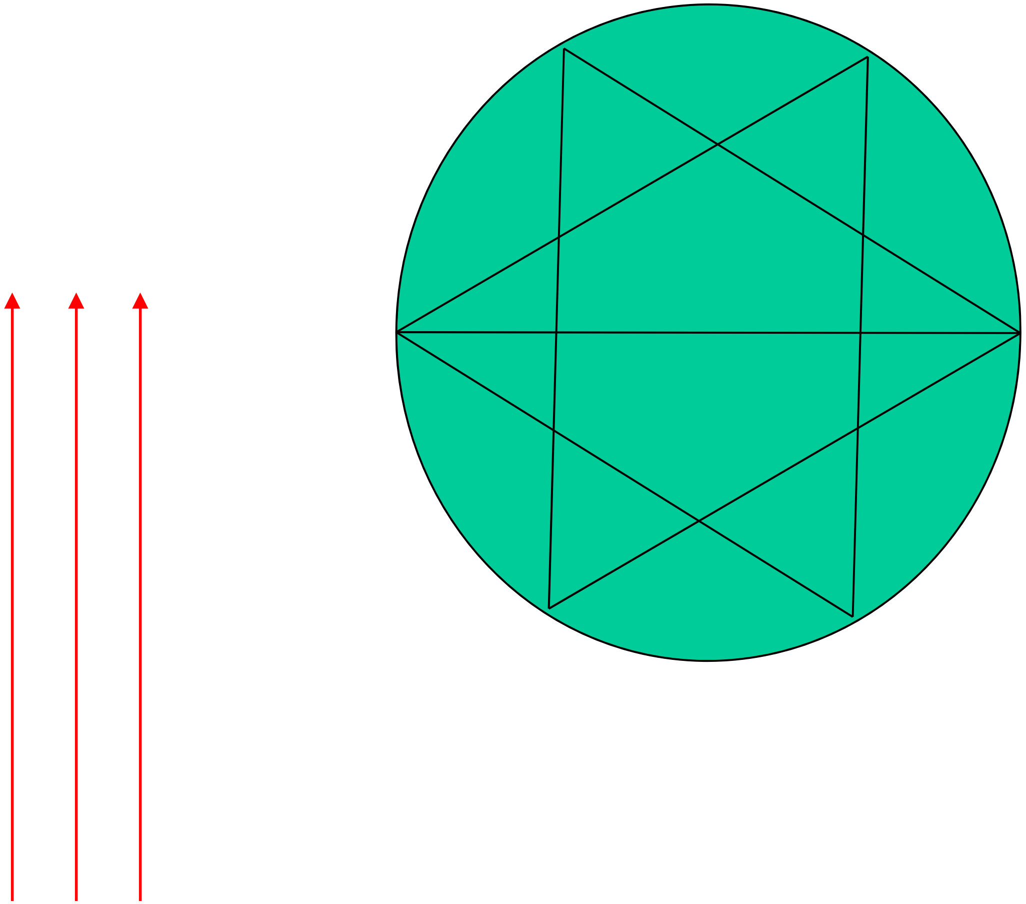


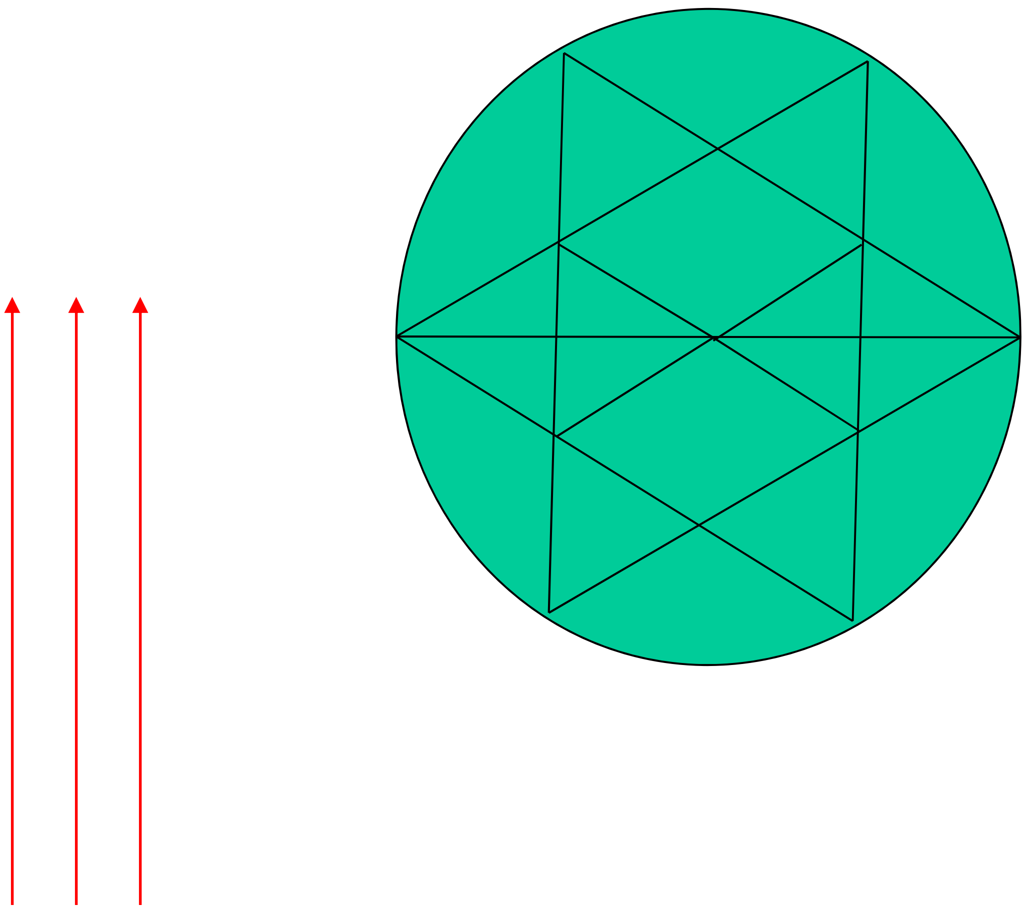
Zentrale Idee: Wahrscheinlichkeitsraum festlegen.

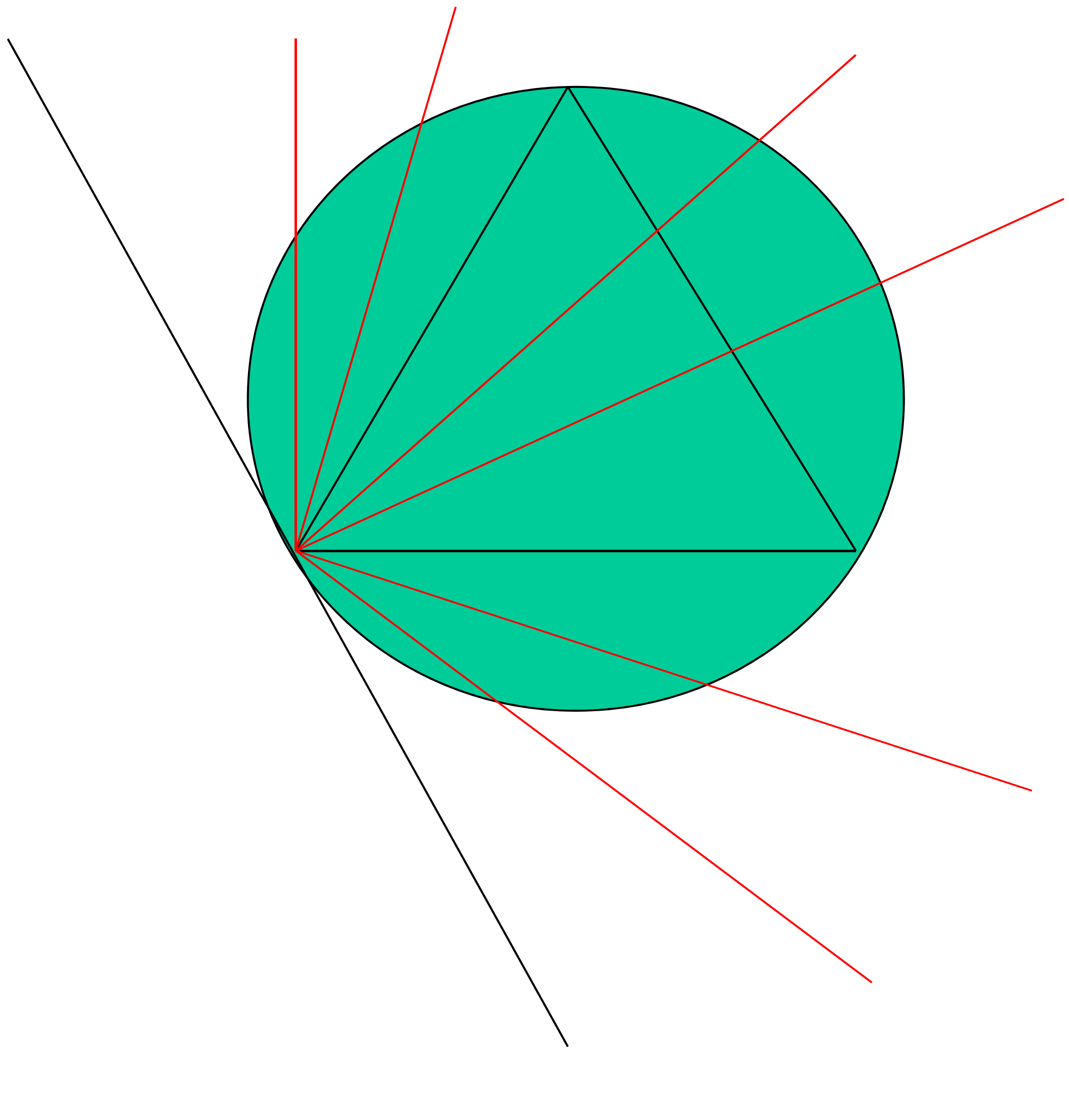


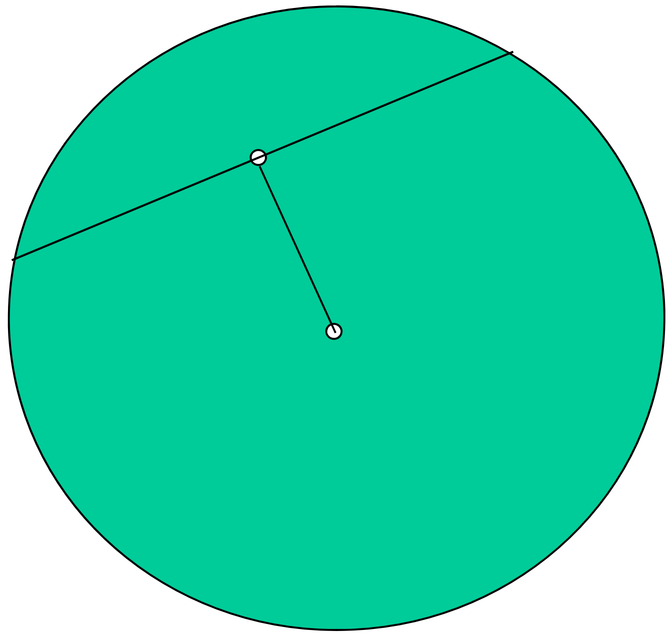
Zentrale Idee: Ohne Modellieren geht es nicht.

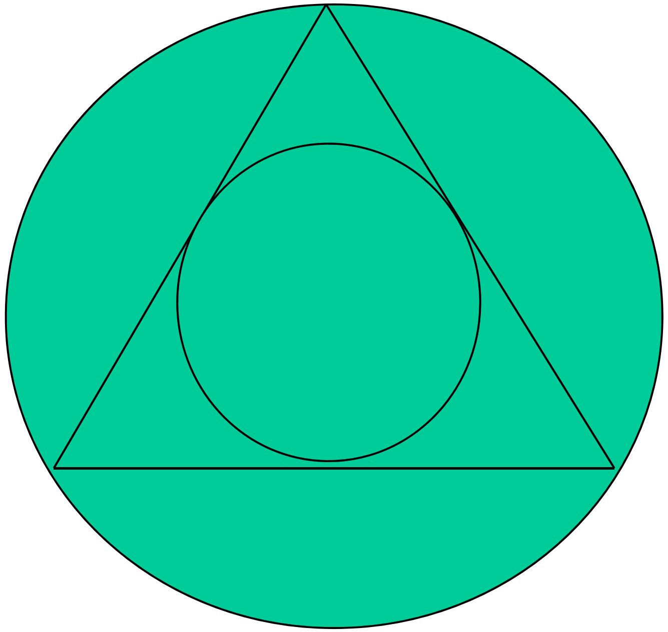












Zentrale Idee: W-Raum festlegen.

Ohne Modellieren geht es nicht.

Reicher und reicher

Bei einer Spielshow lässt der Moderator zwischen einem blauen und einem roten Briefumschlag wählen. In einem der Umschläge ist doppelt so viel Geld wie in dem anderen.

Die Kandidatin wählt den roten Umschlag. Der Moderator schlägt ihr vor zu tauschen.

$$\frac{1}{2}\cdot 2G + \frac{1}{2}\cdot\frac{G}{2} = \frac{5}{4}G$$

Zentrale Idee: Modellbildung reflektieren.

Gaia

Nachdem die Frauen die Weltherrschaft übernommen haben, beschließen sie, dass eine Frau nur so lange Kinder bekommen darf, bis sie einen Jungen bekommt.

Wie wird sich nach diesem Gesetz das zahlenmäßige Verhältnis der Mädchen und Jungen entwickeln?

Nach diesem Gesetz gibt es nur noch Familien mit folgender Kinderfolge:

J

MJ

MMJ

MMMJ

MMMMJ

MMMMMJ

MMMMMMJ

MMMMMMMJ

……………………

128 Frauen	64 M	64 J
64 Frauen	32 M	32 J
32 Frauen	16 M	16 J
16 Frauen	8 M	8 J
8 Frauen	4 M	4 J
4 Frauen	2 M	2 J
2 Frauen	1 M	1 J

Zentrale Idee: erstmal mit absoluten Häufigkeiten arbeiten.

Kluger Umzug

Im Bundesland A beträgt der Durchschnitt der Abiturnoten 2,2.

Im Bundesland B beträgt der Durchschnitt der Abiturnoten 2,4.

Was geschieht, wenn ein Schüler mit der Abiturnote 2,3 von A nach B zieht?

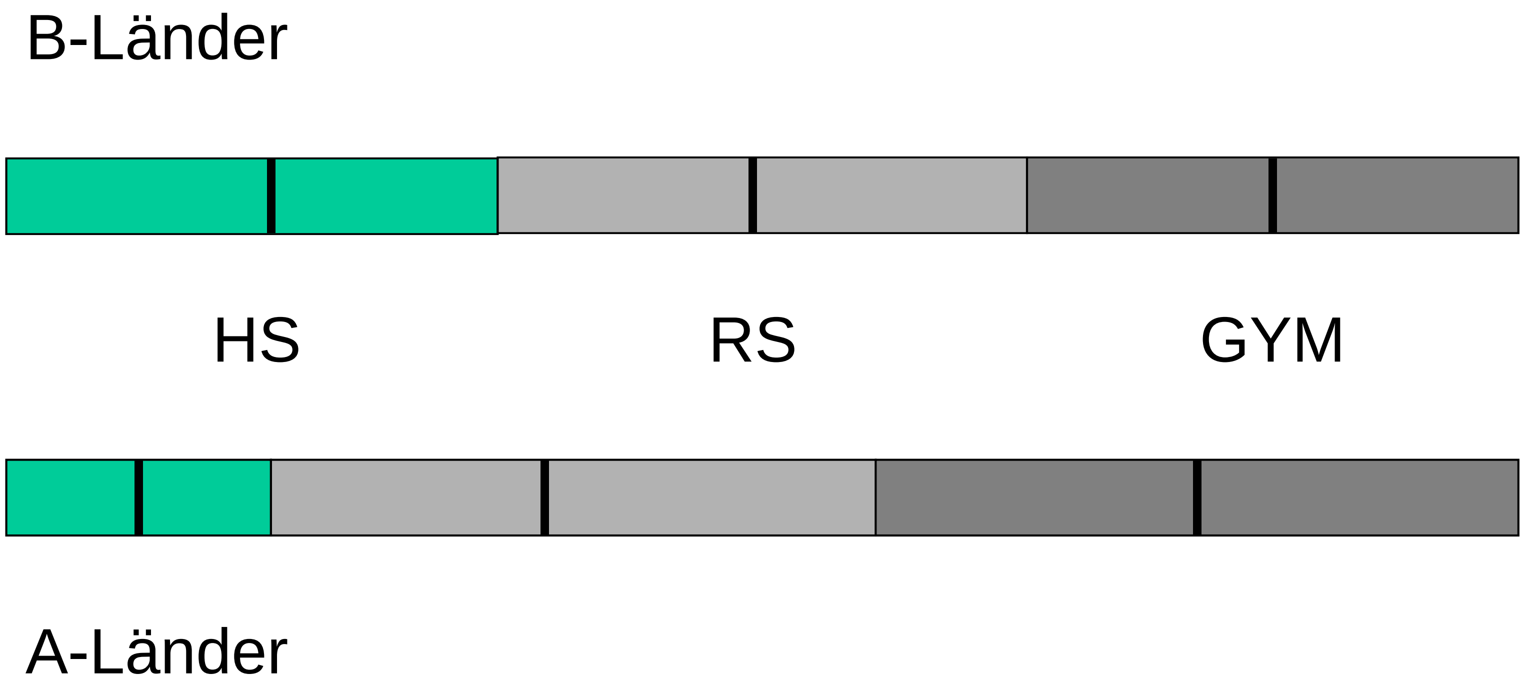
Zentrale Idee: Mittel und Mischen analysieren.

Schulische Anwendung:

Grund- und Erweiterungskurs

Bildungspolitische Anwendung:

Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf Schulformen



Zentrale Idee: Untersuchen, welche Effekte durch das eingesetzte Werkzeug hervorgehoben werden.

Taxiunfall mit Fahrerflucht

Der Zeuge sah ein grünes Taxi. Er erkennt dessen Farbe mit einer Sicherheit von 95% richtig.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das Taxi tatsächlich grün?

In der Stadt gibt es 100 grüne Taxen und 5000 blaue.

	Anzahl	Der Zeuge sagt „blau“	„grün“
Taxi war grün	100	5	95
Taxi war blau	5000	4750	250
Summe	5100	4755	345

Von den 345 Taxen, die der Zeuge grün sieht, sind
95 tatsächlich grün und
250 tatsächlich blau.

Aus seiner Aussage ergibt sich also,
dass das Unfalltaxi mit einer
Wahrscheinlichkeit von $95/345 \approx 28\%$
tatsächlich grün war und mit einer
Wahrscheinlichkeit von $250/345 \approx 72\%$
tatsächlich blau war.

Fahndung: Welche Taxen soll man kontrollieren?

Ein einzelnes blaues Taxi war es mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,72/5000=0,0001444, also 0,0144%.

Ein einzelnes grünes Taxi war es mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,28/100=0,0028, also 0,28%,

was ca. 20 Mal wahrscheinlicher ist.

Insgesamt:

Der Zeuge sagt „grün“, daraus kann man schließen, dass der Unfallwagen blau war.

Kontrollieren sollte man daher zunächst die Grünen.

Ohne Zeuge war das Taxi war mit einer Chance 1:50 grün, also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 2%.

Mit Zeuge war das Taxi mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 28% grün.

Zur weiteren Analyse das Verhältnis der Taxizahlen variieren.

Grüne Taxis	Blaue Taxis	W(grün)
100	5000	28%
1000	5000	79%
2500	5000	90%
5000	5000	95%
10000	5000	97%

Zentrale Idee: Daten variieren.

Bei der Reflexion der Berechnung kann man den Satz von Bayes entdecken!

$$\frac{p(g)\,p(Z{:}g|g)}{p(g)\,p(Z{:}g|g)+p(b)\,p(Z{:}g|b)}$$

Zentrale Idee:

Erst an Beispielen verstehen, dann erst in Begriffe und Sätze gießen.

Das Paradox tritt auch auf bei der Diagnose seltener Krankheiten zum Beispiel bei der Diskussion des Mammographie-Screenings.

Zentrale Idee

Nach realistischen Anwendungen Ausschau halten.

Frauenfeindliche Hochschule?

An einer Hochschule wurden angenommen
- von 2700 Bewerbern 1197 also 44%
- von 1825 Bewerberinnen 560 also 31%.

Haben die Frauen an dieser Hochschule schlechtere Chancen als die Männer?

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496		100	82	
B	600	378		25	17	
C	300	111		600	204	
D	400	132		400	140	
E	200	56		400	96	
F	400	24		300	21	
Summe	2700	1197		1825	560	

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
B	600	378	63%	25	17	68%
C	300	111	37%	600	204	34%
D	400	132	33%	400	140	35%
E	200	56	28%	400	96	24%
F	400	24	6%	300	21	7%
Summe	2700	1197		1825	560	

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
B	600	378	63%	25	17	68%
~~C~~	~~300~~	~~111~~	~~37%~~	~~600~~	~~204~~	~~34%~~
D	400	132	33%	400	140	35%
~~E~~	~~200~~	~~56~~	~~28%~~	~~400~~	~~96~~	~~24%~~
F	400	24	6%	300	21	7%
Summe	~~2700~~	~~1197~~		~~1825~~	~~560~~	

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
B	600	378	63%	25	17	68%
D	400	132	33%	400	140	35%
F	400	24	6%	300	21	7%

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
B	600	378	63%	25	17	68%
D	400	132	33%	400	140	35%
F	400	24	6%	300	21	7%
Summe	2200	1030	47%	825	260	32%

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
~~B~~	~~600~~	~~378~~	~~63%~~	~~25~~	~~17~~	~~68%~~
D	400	132	33%	400	140	35%
~~F~~	~~400~~	~~24~~	~~6%~~	~~300~~	~~21~~	~~7%~~
Summe	~~2200~~	~~1030~~	~~47%~~	~~825~~	~~260~~	~~32%~~

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
D	400	132	33%	400	140	35%

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
D	400	132	33%	400	140	35%
Summe	1200	628	52%	500	222	44%

Fach	Mann	Annahme	Quote	Frau	Annahme	Quote
A	800	496	62%	100	82	82%
D	400	132	33%	400	140	35%
Summe	1200	628	52%	500	222	44%

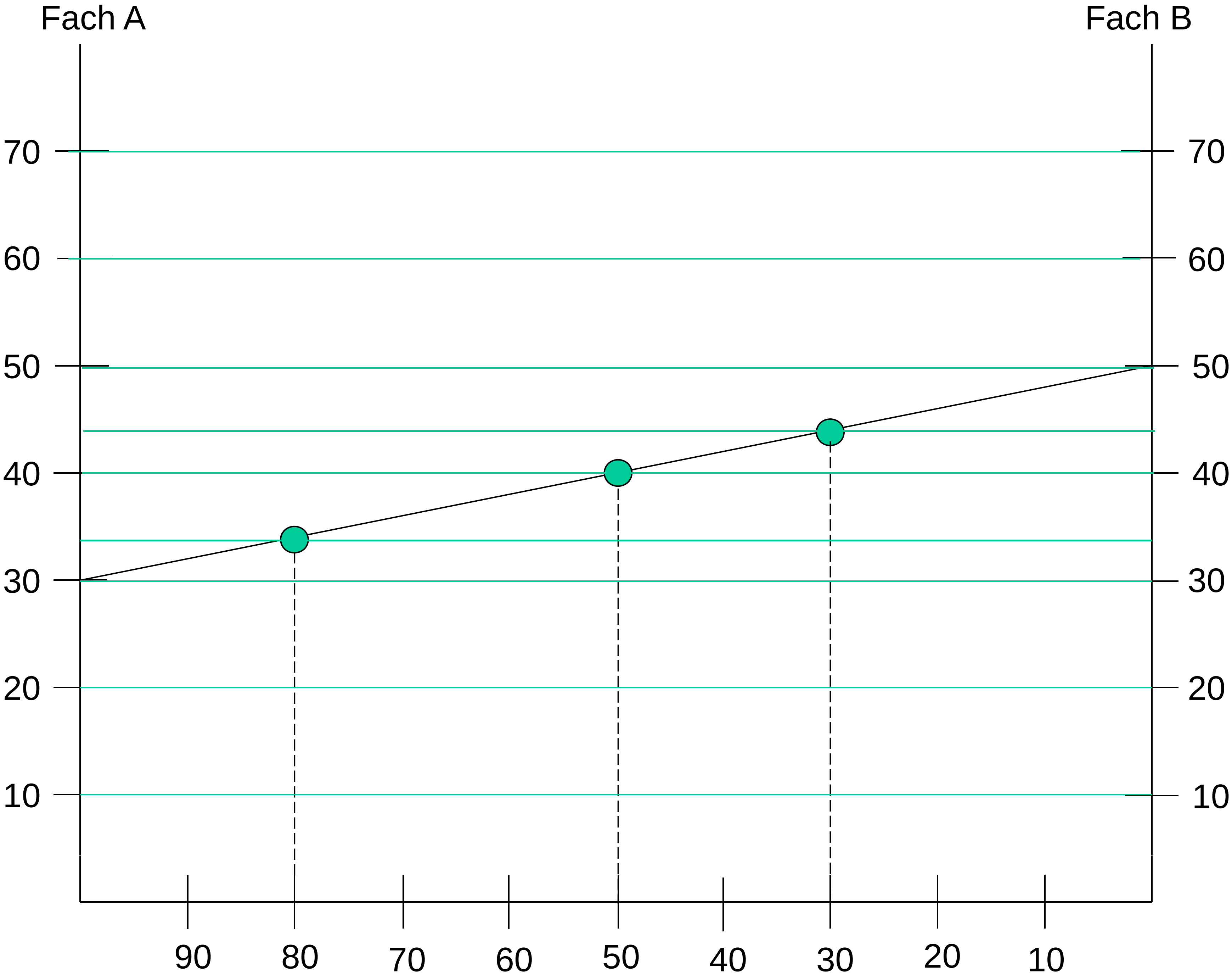
$$\frac{2}{3} \cdot 62\% + \frac{1}{3} \cdot 33\% \approx 41\% + 11\% = 52\%$$

$$\frac{1}{5} \cdot 82\% + \frac{4}{5} \cdot 35\% \approx 16\% + 28\% = 44\%$$

$$P_M = P_M(A) P_M(E|A) + P_M(D) P_M(E|D)$$

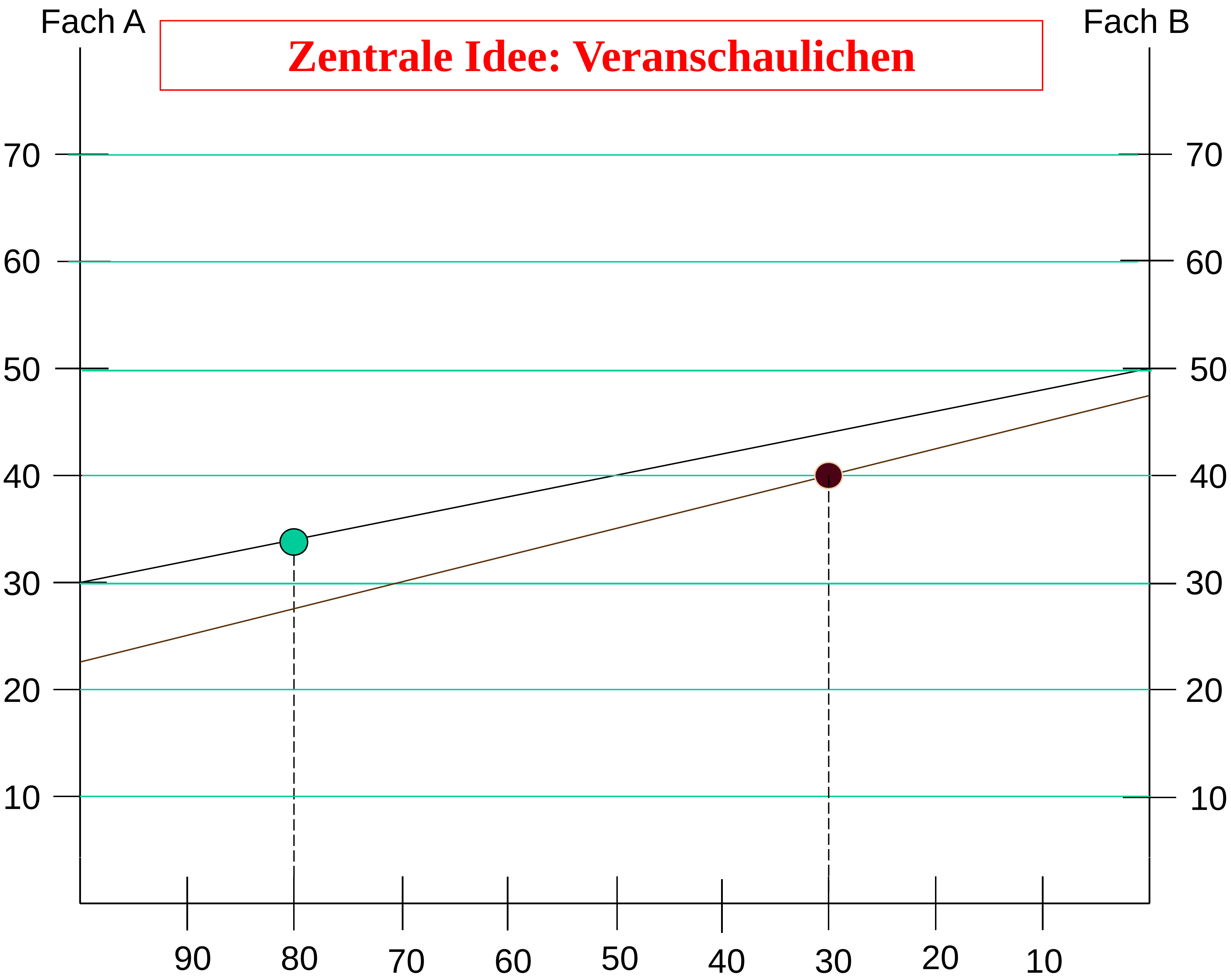
$$P_F = P_F(A) P_F(E|A) + P_F(D) P_F(E|D)$$

Zentrale Idee: Probleme reduzieren.



Fach A
Fach B
70
60
50
40
30
20
10
70
60
50
40
30
20
10
90
80
70
60
50
40
30
20
10

Zentrale Idee: Veranschaulichen



Simpsonsche Paradoxon

Weitere Beispiele:

- Erfolge der Krebsforschung
- Kriminalitätsbelastung von Ausländern
- Bowle-Herstellung

Nicht-Transitives

Nicht-transitive Würfel

B/A	**0**	**0**	**4**	**4**	**4**	**4**
3	B	B	A	A	A	A
3	B	B	A	A	A	A
3	B	B	A	A	A	A
3	B	B	A	A	A	A
3	B	B	A	A	A	A
3	B	B	A	A	A	A

Würfel A	Würfel B	Würfel C	Würfel D
0 0 4 4 4 4	3 3 3 3 3 3	2 2 2 2 6 6	1 1 1 5 5 5

A gewinnt gegen B mit 24:12 (also mit p=2/3),

B gegen C (mit p=2/3), C gegen D und D gegen A (mit p=5/6):

A>B>C>D>A

Es gibt hier keinen besten Würfel, sondern zu jedem Würfel einen besseren!

Ein Münzwurfspiel

Spieler A setzt auf W W Z .

Spieler B setzt auf Z W W.

Wessen Folge zuerst erscheint, hat gewonnen.

Beispiel:

Z W Z W Z Z W Z W Z Z W $\boxed{\text{Z W W}}$
Spieler B hat gewonnen.

W W $\boxed{\text{W W Z}}$
Spieler A hat gewonnen.

B gewinnt mit $p = 3/4$.

Jetzt wählt Spieler A Z W W.

Dann wählt Spieler B Z Z W und gewinnt mit $p = 2/3$.

Jetzt wählt Spieler A Z Z W.

Dann wählt Spieler B W Z Z und gewinnt mit $p = 3/4$.

Jetzt wählt Spieler A W Z Z.

… und so fort.

Spieler A	Spieler B	B gewinnt mit
W W W	Z W W	7/8
W W Z	Z Z W	¾
W Z W	W W Z	2/3
W Z Z	W W Z	2/3

Spieler A	Spieler B	B gewinnt mit
$\boxed{\text{W W}}$ W	Z $\boxed{\text{W W}}$	7/8
$\boxed{\text{W W}}$ Z	Z $\boxed{\text{W W}}$	¾
$\boxed{\text{W Z}}$ W	W $\boxed{\text{W Z}}$	2/3
$\boxed{\text{W Z}}$ Z	W $\boxed{\text{W Z}}$	2/3

Zentrale Idee:

Erfahrungen durch Probieren – dann beherzt analysieren.

Mathematik als Tätigkeit – nicht als Fertigprodukt.

	Test 1		Test 2			Diff.
	roh		roh			
A	0		0			0
B	10		20			+10
C	20		30			+10
D	30		40			+10
MW	15		22,5			
Stand.	11,18		14,79			

	Test 1		Test 2		Diff.
	roh	norm.	roh	norm.	
A	0	366	0	348	
B	10	455	20	483	
C	20	545	30	551	
D	30	634	40	618	
MW	15	500	22,5	500	
Stand.	11,18	100	14,79	100	

	Test 1		Test 2		Diff.
	roh	norm.	roh	norm.	
A	0	366	0	348	- 18
B	10	455	20	483	+ 28
C	20	545	30	551	+ 6
D	30	634	40	618	- 16
MW	15	500	22,5	500	
Stand.	11,18	100	14,79	100	

Zentrale Idee: Vorsicht bei Interpretationen

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Nachfragen, Anmerkungen, Lösungen und Widerspruch bitte an

Jahnke@uni-potsdam.de

Zentrale Idee: Kontaktieren!

Ich habe diese Paradoxa hier nur kurz vorstellen, aber sie natürlich nicht schulisch behandeln oder sorgfältiger diskutieren können.
Zu den heutigen Gutworten der Unterrichtsbesuchspädagogik und auch mancher Lehrerfortbildung gehört bei Aufgaben das Epitheton „authentisch". Aufgaben sollen authentisch sein. Wenn damit gemeint ist, dass eine Aufgabe oder Problemstellung tatsächlich in sinnvoller Weise einer außerschulischen Sachsituation entnommen ist und der Experte sie dann auch so, wie das dann in der Schule getan oder angestrebt wird, bearbeiten und lösen wird oder würde, dann muss man einfach mal zugeben, dass es keine oder nur sehr wenige authentische Aufgaben gibt. Aber man kann die Bezeichnung authentisch auch in anderer Weise verstehen. Der deutsche Philosoph Gadamer hat einmal geschrieben, eine Frage verstehen, heißt sie sich stellen. Das sollten wir im Mathematikunterricht anstreben, dass Fragen gestellt werden und die Schülerinnen und Schüler sie sich zu Eigen machen; dann wird's, wenn man denn dieses Wort gebrauchen will, authentisch.
So können sie durch eigenes Denken etwas herausfinden, um das anfängliche Statement von Beutelspacher noch einmal aufzunehmen. Bei diesem Denken sollte die Lehrerin oder der Lehrer nicht allzu sehr stören, sondern allenfalls sanfte Anregungen geben. Die Schweizer Didaktiker Ruf und Gallin sprechen sich gegen das Erklären aus mit der Begründung: Erklären legt den Weg des Verstehens fest.
Die Beschäftigung mit den aufgeführten oder anderen Paradoxa kann das Bild der Schülerinnen und Schüler von Mathematik möglicherweise ändern oder zumindest erschüttern: weg von einem algorithmen- und resultatorientierten Mathematikunterricht, in dem den Schülerinnen und Schülern im wesentlichen Mathematik nachvollziehend übernehmen, zu einem Unterricht, der zuweilen deutlich werden lässt, dass es sich bei Mathematik um das Land der Abenteuer formalen Denkens handelt und nicht die Präzision der Kern der Mathematik ist, sondern die charakteristische, auf Begründungen und Beweisen beruhende Gültigkeit ihrer Aussagen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Referenzen

Die Literatur zu stochastischen Paradoxa ist umfangreich. Zu den im Vortrag angeführten Beispielen folgende Hinweise:

Das „blau-grüne Taxi" ist dem sehr gut lesbaren und erhellenden Buch „Mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit – Logisches Denken und Zufall" von Hans-Peter Beck-Bornholt und Hans-Hermann Dubben (Rowohlt-Verlag, Hamburg, 2005, S. 37ff) entnommen.

Das Simpsonsche Paradoxon ist von mir ausführlich in „Das Simpsonsche Paradoxon verstehen - ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung" im J. Math.-Didakt. 14, No. 3-4, 221-242 (1993) bearbeitet.

Die Paradoxa der Gold-Silber-Münzen und der Sehne im Kreis gehen auf Joseph Bertrand (franz. Mathematiker 1822 – 1900) zurück.

Diese und weitere der im Vortrag behandelten Paradoxa sind auch in dem Schulbuch „Mathematik Stochastik" (Hrsg.: Thomas Jahnke und Hans Wuttke, Cornelsen Verlag, Berlin 2005) insbesondere im Kapitel 1.3 „Widersprüche" (S. 39ff) und dem Kapitel 3 „Entscheiden" (S. 104ff) und den zugehörigen „Handreichungen für den Unterricht" (Cornelsen Verlag, Berlin 2005) zu finden.